

制御工学I 第13回 周波数特性 ボード線図

平成26年07月07日

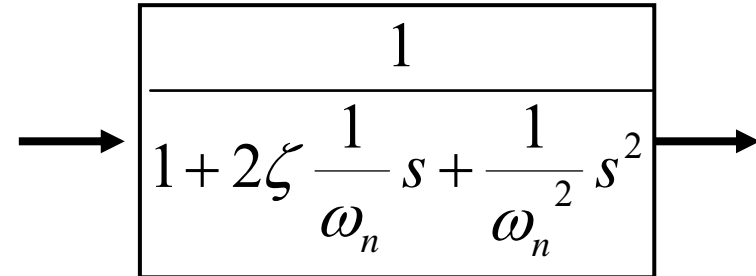
授業の予定

- 制御工学概論(1回)
 - 制御技術は現在様々な工学分野において重要な基本技術となっている。工学における制御工学の位置づけと歴史について説明する。さらに、制御システムの基本構成と種類を紹介する。
- ラプラス変換(1回)
 - 制御工学、特に古典制御ではラプラス変換が重要な役割を果たしている。ラプラス変換と逆ラプラス変換の定義を紹介し、微分方程式のラプラス変換について解説する。
- 制御システムのモデリングと伝達関数(3回)
 - システムの相似性について概説し、システムの入出力特性を表す手法である伝達関数について詳述する。システムの図的表現であるブロック線図とその等価変換について解説する。
- 過渡特性(3回)
 - システムの過渡状態を評価する方法であるインパルス応答とインディシャル応答について解説する。システムの速応性や安定性の指標である整定時間、立ち上がり量、行き過ぎ量について述べる。
- 安定性(2回)
 - システムの安定性の概念を述べ、安定性を判定する代数的方法であるラウス-フルビッツの方法について説明する。
- 周波数特性(4回)
 - 周波数領域におけるシステムの特性を周波数特性という。周波数特性と伝達関数との関係を説明し、ベクトル軌跡とボード線図の作成方法を説明する。

ボード線図

$$\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad \text{二次のシステム1}$$

- 二次のシステム



$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\zeta \left(j \frac{\omega}{\omega_n} \right) + \left(j \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2}$$

– 減衰比 ζ

– 固有角周波数 $\omega = \omega_n \left(\frac{2\zeta}{\omega_n} \right)^2 - 4 \frac{1}{\omega_n^2} = \left(\frac{2}{\omega_n} \right)^2 (\zeta^2 - 1)$

– 判別式(減衰比 ζ)

- $\zeta > 1$: 実根を持つ一次システム $\times 2$

- $0 < \zeta < 1$: 共役複素根を持つ

ボード線図

二次のシステム2

- 二次のシステム $G(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\zeta\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right) + \left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$
- 振幅

$$20\log\left|\frac{1}{1 + 2\zeta\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right) + \left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\right| = -20\log\left|1 + 2\zeta\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right) + \left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right|$$
$$= -20\log\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \text{ dB}$$

ボード線図

二次のシステム3

- 二次のシステムの位相

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{1}{1 + 2\zeta \left(j \frac{\omega}{\omega_n} \right) + \left(j \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 + j2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}} \\ &= \frac{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 - j2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{\left\{ 1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 + j2\zeta \frac{\omega}{\omega_n} \right\} \left\{ 1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 - j2\zeta \frac{\omega}{\omega_n} \right\}} \\ &= \frac{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 - j2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{\left\{ 1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right\}^2 + \left\{ 2\zeta \frac{\omega}{\omega_n} \right\}^2} \end{aligned}$$

ボード線図

二次のシステム4

- 二次のシステムの位相

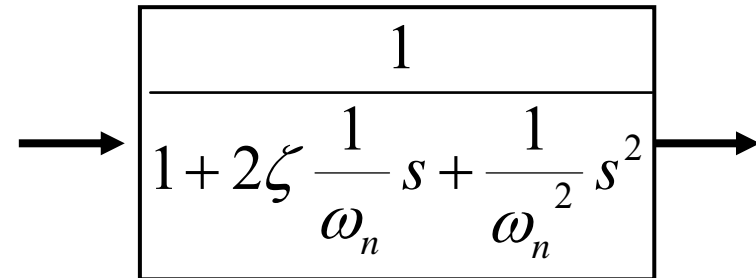
$$\phi = \angle \frac{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 - j2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{\left\{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right\}^2 + \left\{2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right\}^2}$$
$$= -\tan^{-1} \frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

ボード線図 二次のシステム

- 二次のシステム

- 周波数伝達関数

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\zeta \left(j \frac{\omega}{\omega_n} \right) + \left(j \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2}$$



- 振幅

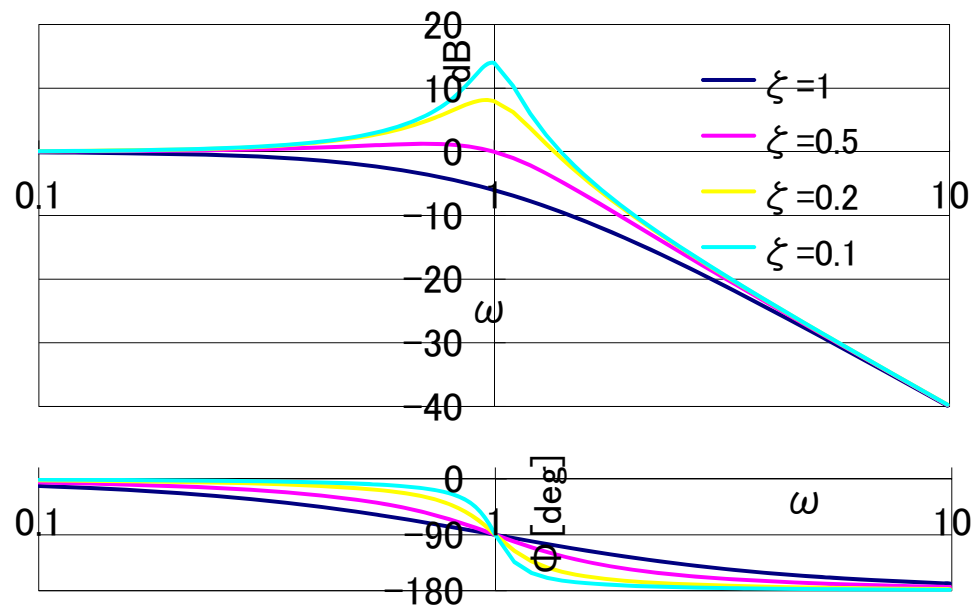
$$-20 \log \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right)^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2} \text{ dB}$$

- 位相

$$\phi = -\tan^{-1} \frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2}$$

ボード線図 二次のシステム

- 二次のシステム
 - ボード線図
 - ζ が小さいとピークを持つ



ボード線図

二次のシステム

- 振幅の近似線

- 減衰比 ζ を無視

- 高周波領域 $\omega \gg \omega_n$ ($1 \ll \omega/\omega_n$)

$$\begin{aligned} -20 \log \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} &\cong -20 \log \sqrt{\left(\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2} \\ &= -20 \log \left(\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) = -40 \log \frac{\omega}{\omega_n} \text{ dB} \end{aligned}$$

- 高周波領域近似線

- 傾き-40dB/decade $-40 \log \frac{10\omega}{\omega_n} = -40 \left(\log 10 + \log \frac{\omega}{\omega_n} \right)$

ボード線図 二次のシステム

- 低周波領域 $\omega \ll \omega_n$ ($1 \gg \omega/\omega_n$)
 - 0dBの水平線

$$-20 \log \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \cong -20 \log 1 = 0 \text{dB}$$

- 交点(折点周波数)
 - $\omega/\omega_n = 1 \rightarrow$ 固有角周波数 $\omega = \omega_n$
- 減衰比 ζ で共振点でのピーク値が変わる
 - 折れ線での近似値 0dB
 - 減衰比 ζ が小さいと、ピークが大きくなり、近似からの乖離大

ボード線図

二次のシステム

- 二次のシステムの共振周波数とピーク値

– 二次のシステム $G(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\zeta \left(j \frac{\omega}{\omega_n} \right) + \left(j \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2}$

- 振幅

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

ボード線図

二次のシステム

- 振幅の極大値

- 分子→定数

- 分母→振幅極少値→二乗の極小値

- 根号の中 $g(\omega) = \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2$

$$= 1 - 2\frac{\omega^2}{\omega_n^2} + \left(\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4\zeta^2 \frac{\omega^2}{\omega_n^2}$$

$$= 1 - 2(1 - 2\zeta^2)\frac{\omega^2}{\omega_n^2} + \left(\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2$$

ボード線図 二次のシステム

- 振幅の極大値 (ω^2 の二次関数)

$$g(\omega) = 1 - (1 - 2\zeta^2)^2 + (1 - 2\zeta^2)^2 - 2(1 - 2\zeta^2) \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + \left(\frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right)^2$$

$$= 1 - (1 - 4\zeta^2 + 4\zeta^4) \left[(1 - 2\zeta^2) - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right]^2$$

$$= 4\zeta^2(1 - \zeta^2) + \left[\frac{\omega_n^2(1 - 2\zeta^2) - \omega^2}{\omega_n^2} \right]^2$$

$$\frac{d}{d\omega^2} g(\omega) = 2 \left[\frac{\omega_n^2(1 - 2\zeta^2) - \omega^2}{\omega_n^2} \right] = 0$$

ボード線図 二次のシステム

– 極値をとる共振周波数 $\omega=\omega_r$

$$\frac{\omega_r^2 - \omega_n^2(1 - 2\zeta^2)}{\omega_n^2} = 0$$

$$\omega_r^2 - \omega_n^2(1 - 2\zeta^2) = 0$$

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2} \quad \text{固有角周波数からずれる}$$

ただし
– 分母の極値

$$1 - 2\zeta^2 \geq 0 \quad 0 \leq \zeta \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \cong 0.707$$

» 根号の中

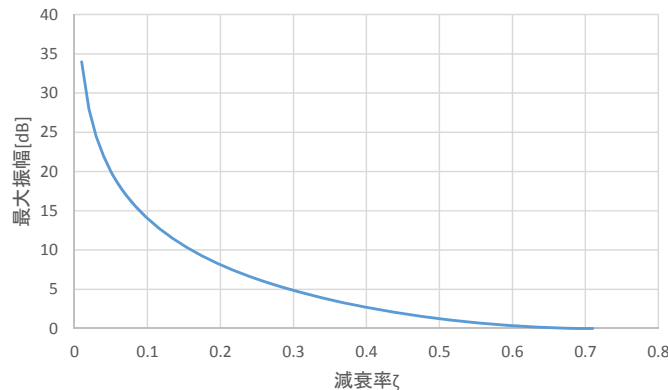
$$g(\omega_r) = 4\zeta^2(1 - \zeta^2)$$

ボード線図 二次のシステム

- 減衰比 ζ が零に近づくと、共振周波数は ω_n に近づく
- 減衰比 $\zeta > 0.707$ では共振ピークを持たない(ω_r が実解とならない)
 - » 周波数が高くなるに従い振幅減少(単調減少)
 - » 振幅Mは1(0dB)以下

- 減衰比 $0 \leq \zeta \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ でのピーク振幅 M_r

$$M_r = |G(j\omega)|_{\max} = |G(j\omega_r)| = \frac{1}{\sqrt{4\zeta^2(1-\zeta^2)}} = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$$



ボード線図 二次のシステム

- 位相の特性

- 周波数 ω と減衰比 ζ に依存

- 直流 $\omega=0$

- 位相 0°

- 折点周波数 $\omega=\omega_n$

$$\phi = -\tan^{-1} \frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} = -\tan^{-1} \frac{2\zeta}{0} = -90^\circ$$

- 高周波 $\omega=\infty$

$$\phi = -\tan^{-1} \frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} = -\tan^{-1} \frac{1}{\infty} = -180^\circ$$

ボード線図 二次のシステム

– 共振周波数での位相

$$\begin{aligned}\angle G(j\omega_r) &= -\tan^{-1} \frac{2\zeta \frac{\omega_r}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega_r}{\omega_n}\right)^2} = -\tan^{-1} \frac{2\zeta \frac{\omega_n \sqrt{1-2\zeta^2}}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega_n \sqrt{1-2\zeta^2}}{\omega_n}\right)^2} \\ &= -\tan^{-1} \frac{2\zeta \sqrt{1-2\zeta^2}}{1 - \left(\sqrt{1-2\zeta^2}\right)^2} = -\tan^{-1} \frac{2\zeta \sqrt{1-2\zeta^2}}{1 - (1-2\zeta^2)}\end{aligned}$$

つづく→

ボード線図 二次のシステム

– 共振周波数での位相

$$\begin{aligned}\angle G(j\omega_r) &= -\tan^{-1} \frac{2\zeta \sqrt{1-2\zeta^2}}{2\zeta^2} = -\tan^{-1} \frac{\sqrt{1-2\zeta^2}}{\zeta} \\ &= -90^\circ + \arcsin \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\end{aligned}$$

ボード線図

二次のシステム16

• 二次のシステム \rightarrow $\boxed{1 + 2\zeta \frac{1}{\omega_n} s + \frac{1}{\omega_n^2} s^2}$ \rightarrow

$$1 + 2\zeta \left(j \frac{\omega}{\omega_n} \right) + \left(j \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2$$

– 符号を反転

- 振幅(対数)
- 位相

$$\frac{1}{1 + 2\zeta \left(j \frac{\omega}{\omega_n} \right) + \left(j \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2}$$

ボード線図の書き方

- 伝達関数 $G(s) = \frac{10s + 30}{s^4 + 3s^3 + 3s^2 + 4s} = \frac{10(s + 3)}{s(s + 2)(s^2 + s + 2)}$

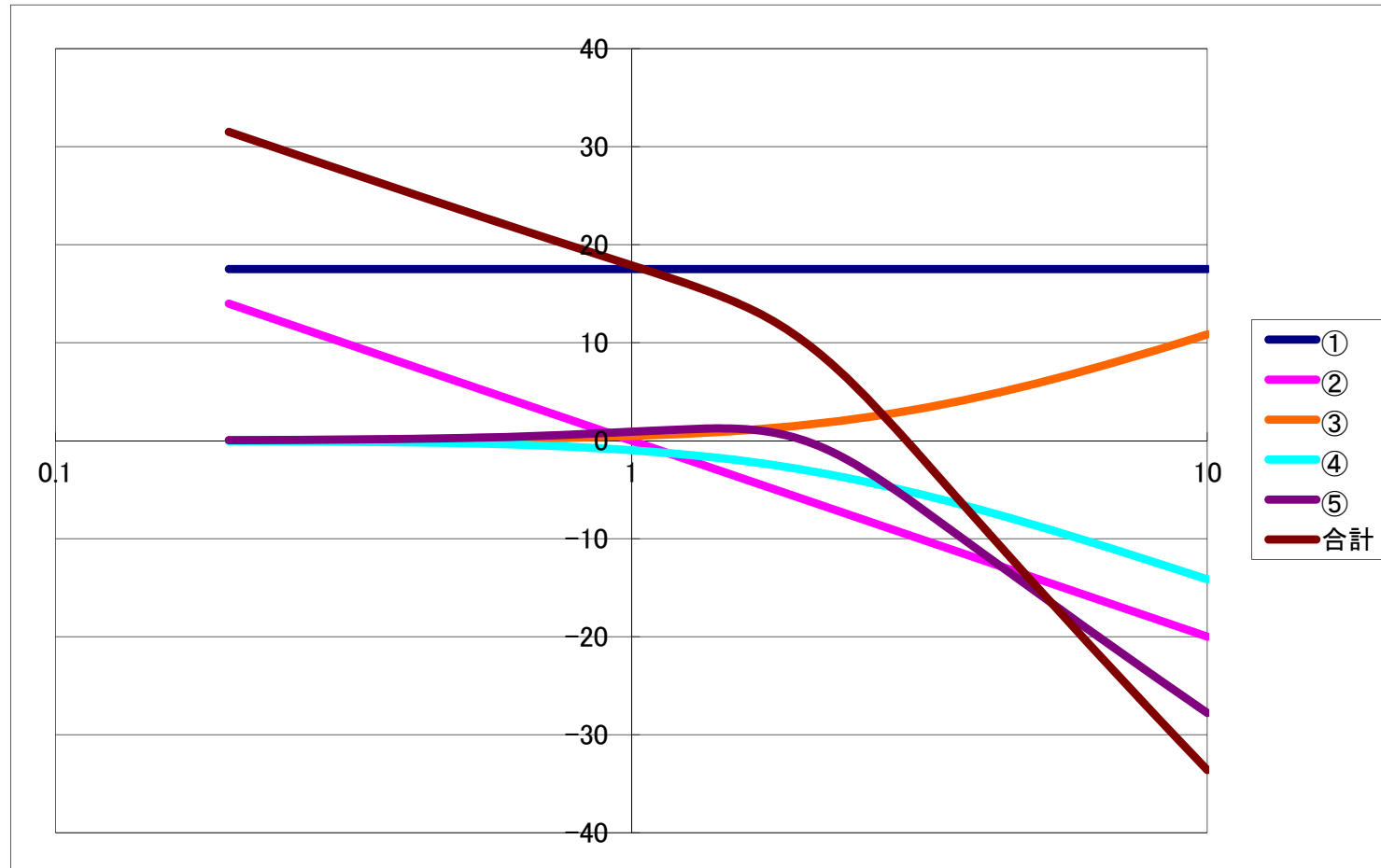
- 周波数伝達関数

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{10(j\omega + 3)}{j\omega(j\omega + 2)((j\omega)^2 + j\omega + 2)} \\ &= \frac{10\left(1 + \frac{j\omega}{3}\right)3}{j\omega\left(1 + \frac{j\omega}{2}\right)2\left(1 + \frac{j\omega}{2} + \frac{(j\omega)^2}{2}\right)2} = \frac{7.5\left(1 + \frac{j\omega}{3}\right)}{j\omega\left(1 + \frac{j\omega}{2}\right)\left(1 + \frac{j\omega}{2} + \frac{(j\omega)^2}{2}\right)} \end{aligned}$$

ボード線図の書き方

- 周波数伝達関数の構成要素と振幅
 - 7.5 水平直線: $20\log 7.5$
 - $(j\omega)^{-1}$ 直線: 傾き -20dB/dec ($0\text{dB}@\omega=1$)
 - $1 + \frac{j\omega}{3}$ 近似直線: 0dB , 折点 $\omega=3$, 傾き 20dB/dec
 - $\left(1 + \frac{j\omega}{2}\right)^{-1}$ 近似直線: 0dB , 折点 $\omega=2$, 傾き -20dB/dec
 - $\left(1 + \frac{j\omega}{2} + \frac{(j\omega)^2}{2}\right)^{-1}$ 近似直線: 減衰係数 $\zeta=0.3536$
 0dB , 折点 $\omega=\sqrt{2}$, 傾き -40dB/dec

ボード線図ゲイン



ボード線図位相

