制御工学I　第14回
周波数特性
ナイキスト線図

平成26年07月14日

授業の予定

- 制御工学概論（１回）
  - 制御技術は現在様々な工学分野において重要な基本技術となっている。工学における制御工学の位置づけと歴史について説明する。さらに、制御システムの基本構成と種類を紹介する。
- ラプラス変換（１回）
  - 制御工学、特に古典制御ではラプラス変換が重要な役割を果たしている。ラプラス変換と逆ラプラス変換の定義を紹介し、微分方程式のラプラス変換について解説する。
- 制御システムのモデリングと伝達関数（３回）
  - システムの相似性について概説し、システムの入出力特性を表す手法である伝達関数について詳述する。システムの図的表現であるブロック線図とその等価変換について解説する。
- 過渡特性（３回）
  - システムの過渡状態を評価する方法であるインパルス応答とインディシャル応答について解説する。システムの速応性や安定性の指標である整定時間、立ち上がり量、行き過ぎ量について述べる。
- 安定性（２回）
  - システムの安定性の概念を述べ、安定性を判定する代数的方法であるラウス-フルビッツの方法について説明する。
- 周波数特性（４回）
  - 周波数領域におけるシステムの特性を周波数特性という。周波数特性と伝達関数との関係を説明し、ベクトル軌跡とボード線図の作成方法を説明する。

ボード線図

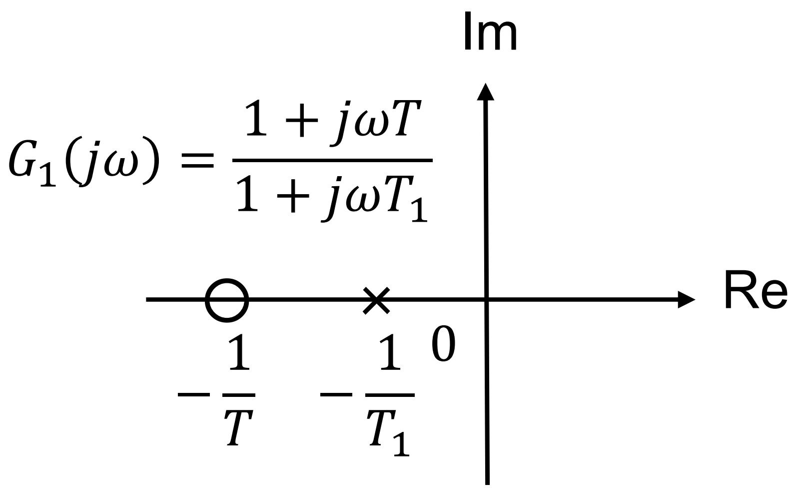
- 全域通過フィルタ(APF): $G(s) = \frac{1-sT}{1+sT}$
  - 周波数伝達関数:$G(j\omega) = \frac{1-j\omega T}{1+j\omega T}$
    - 振幅特性→変化しない
      - $|G(j\omega)| = \left|\frac{1-j\omega T}{1+j\omega T}\right| = \left|\frac{(1-j\omega T)^2}{(1+j\omega T)(1-j\omega T)}\right| = \frac{\left|1-\omega^2T^2-j2\omega T\right|}{1+\omega^2T^2}$
        $= \frac{\sqrt{(1-\omega^2T^2)^2+4\omega^2T^2}}{1+\omega^2T^2} = \frac{\sqrt{(1+\omega^2T^2)^2}}{1+\omega^2T^2} = 1$
    - 位相特性→変化する
      - $\angle G(j\omega) = \angle\frac{1-j\omega T}{1+j\omega T} = \angle\frac{1-\omega^2T^2-j2\omega T}{1+\omega^2T^2} = \tan^{-1}\frac{-2\omega T}{1-\omega^2T^2}$

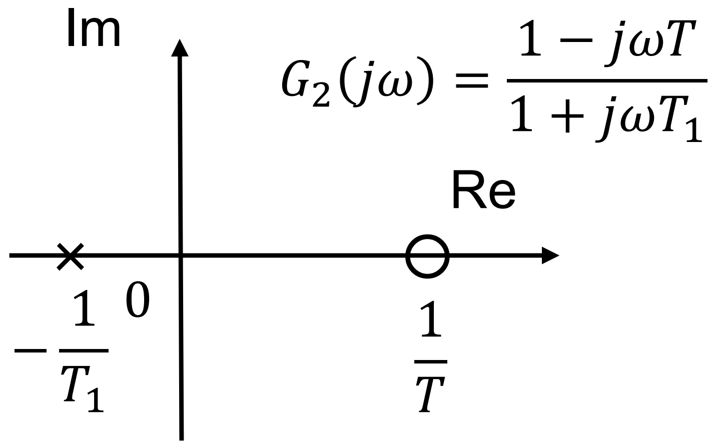
最小位相系・非最小位相系

- 最小位相系:安定かつ，不安定零点を持たないシステム
  - 伝達関数の極，零点が右半面に存在しない
  - 振幅特性から伝達関数が一意に定まる
    - 位相特性が求まる
    - 同じ振幅特性をもつシステムの中で位相が最小
- 非最小位相系
  - 伝達関数の極および/または零点が右半面に存在
  - 振幅特性から伝達関数が一意に定まらない

最小位相系・非最小位相系

- 例
  - $G_1(s) = \frac{1+sT}{1+sT_1}$, $G_2(s) = \frac{1-sT}{1+sT_1}$
    - ただし$0 < \mathrm{T} < T_1$
  - 極，零点配置





最小位相系･非最小位相系

- $G_1(j\omega)$, $G_2(j\omega)$の振幅特性は同じ
  - $|G_1(j\omega)| = \left|\frac{1+j\omega T}{1+j\omega T_1}\right| = \left|\frac{(1+j\omega T)(1-j\omega T_1)}{(1+j\omega T_1)(1-j\omega T_1)}\right|$

$$= \frac{|1 + \omega^2 T T_1 + j\omega(T - T_1)|}{1 + \omega^2 {T_1}^2}$$

$$= \frac{\sqrt{(1 + \omega^2 T T_1)^2 + \omega^2 (T - T_1)^2}}{1 + \omega^2 {T_1}^2}$$

$$= \frac{\sqrt{1 + 2\omega^2 T T_1 + \omega^4 T^2 {T_1}^2 + \omega^2 T^2 - 2\omega^2 T T_1 + \omega^2 {T_1}^2}}{1 + \omega^2 {T_1}^2}$$

最小位相系・非最小位相系

– $|G_1(j\omega)| =$

$$= \frac{\sqrt{1 + \omega^4 T^2 {T_1}^2 + \omega^2 T^2 + \omega^2 {T_1}^2}}{1 + \omega^2 {T_1}^2}$$

$$= \frac{\sqrt{(1 + \omega^2 T^2)\left(1 + \omega^2 {T_1}^2\right)}}{1 + \omega^2 {T_1}^2}$$

– $|G_2(j\omega)| = \left|\frac{1 - j\omega T}{1 + j\omega T_1}\right| = \left|\frac{(1 - j\omega T)(1 - j\omega T_1)}{(1 + j\omega T_1)(1 - j\omega T_1)}\right|$

$$= \frac{|1 - \omega^2 T T_1 + j\omega(T + T_1)|}{1 + \omega^2 {T_1}^2}$$

最小位相系・非最小位相系

- $|G_2(j\omega)| = \frac{\sqrt{(1-\omega^2 T T_1)^2 + \omega^2 (T+T_1)^2}}{1+\omega^2 {T_1}^2}$

$$= \frac{\sqrt{1 - 2\omega^2 T T_1 + \omega^4 T^2 {T_1}^2 + \omega^2 T^2 + 2\omega^2 T T_1 + \omega^2 {T_1}^2}}{1 + \omega^2 {T_1}^2}$$

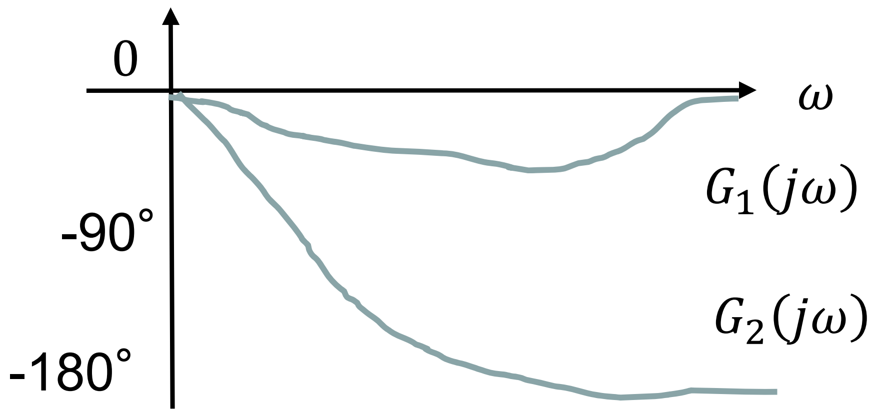
$$= \frac{\sqrt{1 + \omega^4 T^2 {T_1}^2 + \omega^2 T^2 + \omega^2 {T_1}^2}}{1 + \omega^2 {T_1}^2}$$

$$= \frac{\sqrt{(1 + \omega^2 T^2)\left(1 + \omega^2 {T_1}^2\right)}}{1 + \omega^2 {T_1}^2}$$

- $\rightarrow |G_1(j\omega)|$

最小位相系・非最小位相系

- $G_1(j\omega)$, $G_2(j\omega)$の位相特性は異なる
  - $\angle G_1(j\omega) = \angle \frac{1+\omega^2 TT_1 + j\omega(T-T_1)}{1+\omega^2 {T_1}^2} = \tan^{-1} \frac{\omega(T-T_1)}{1+\omega^2 TT_1}$
  - $\angle G_2(j\omega) = \angle \frac{1-\omega^2 TT_1 - j\omega(T+T_1)}{1+\omega^2 {T_1}^2} = \tan^{-1} \frac{-\omega(T+T_1)}{1-\omega^2 TT_1}$

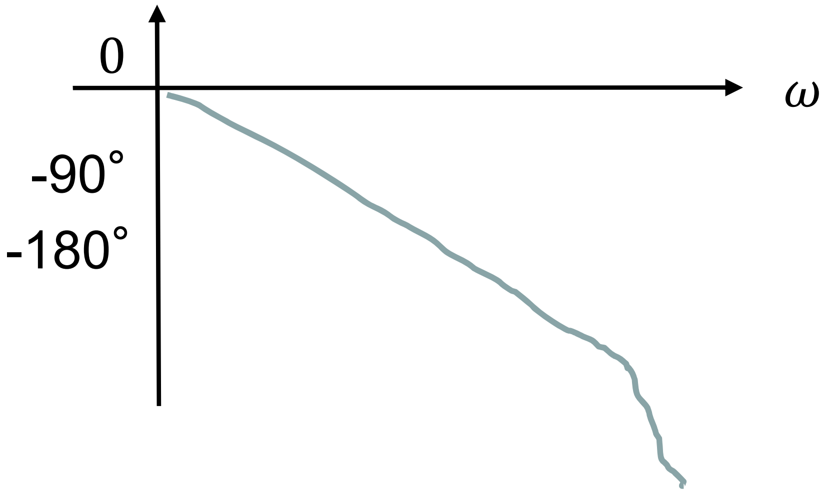


最小位相系・非最小位相系

- 伝達関数の分子の次数p，分母の次数q
- 振幅特性（最小位相系・非最小位相系共）
  - $\omega \to \infty$における傾き -20(q-p) dB/dec
- 位相特性
  - $\omega \to \infty$ 最小位相系 -90(q-p) deg
    - 非最小位相系 -90(q-p) degとならない
- 振幅特性と位相特性を見れば最小位相系かどうか分かる
- 非最小位相系は，位相遅れのため応答遅い

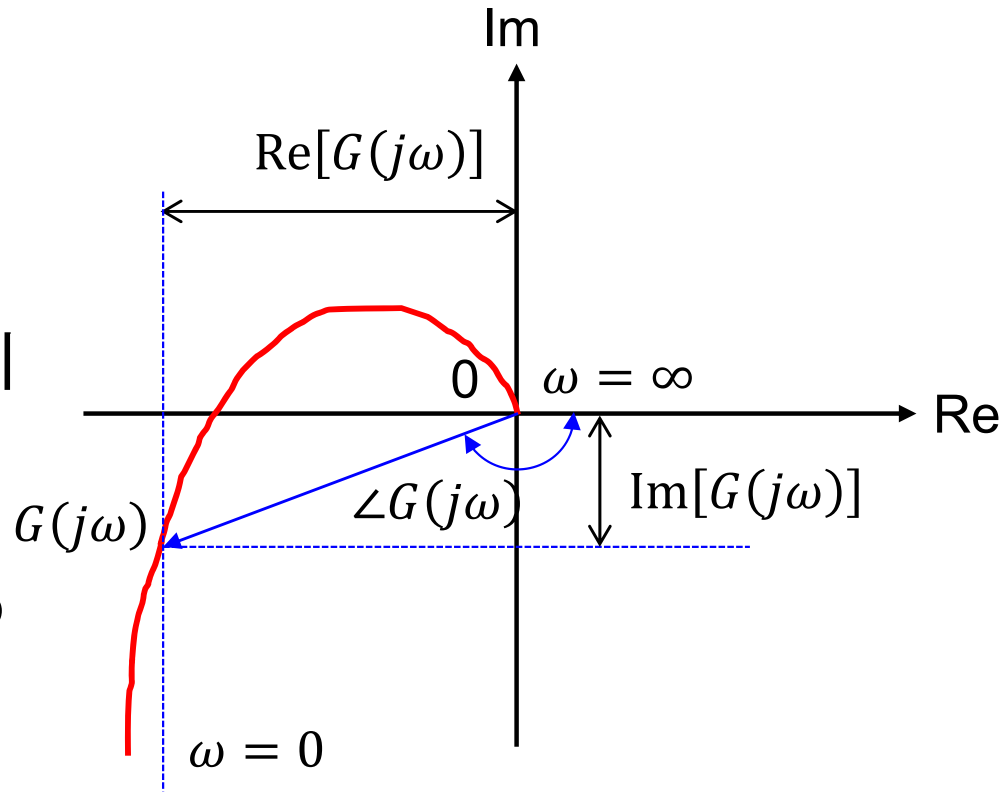
伝達遅れ（むだ時間）

- 伝達関数$G(s) = e^{-sT}$
  - 非最小位相系$G(j\omega) = e^{-j\omega T}$
  - 振幅特性:高周波でも振幅変わらない
    - $|G(j\omega)| = |\cos\omega T - j\sin\omega T| = 1$
  - 位相特性:高周波では位相遅れ大
    - $\angle G(j\omega) = -\omega T$ [rad]



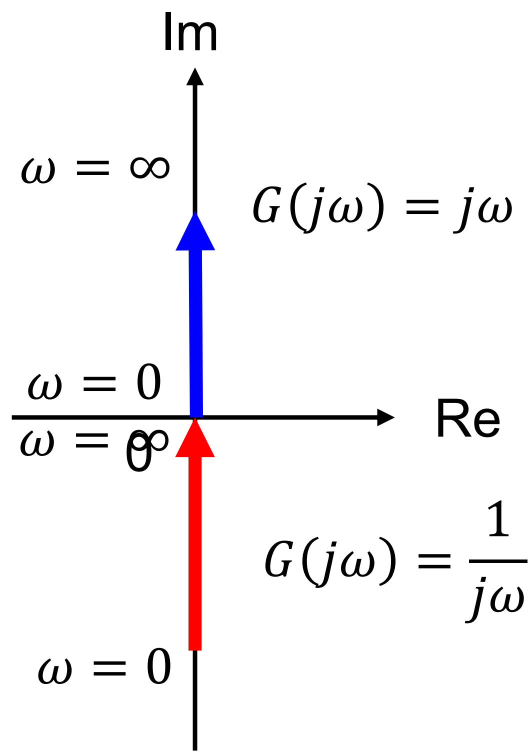
ナイキスト(ベクトル)線図

- 周波数伝達関数の複素平面表示
  - 周波数伝達関数$G(j\omega)$
  - 周波数を0から∞に掃引
    - ボード線図との違い
      - 手書きはムズイ
      - ばらして描いたものの合成できない

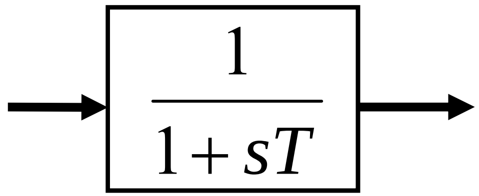


ナイキスト線図
積分・微分

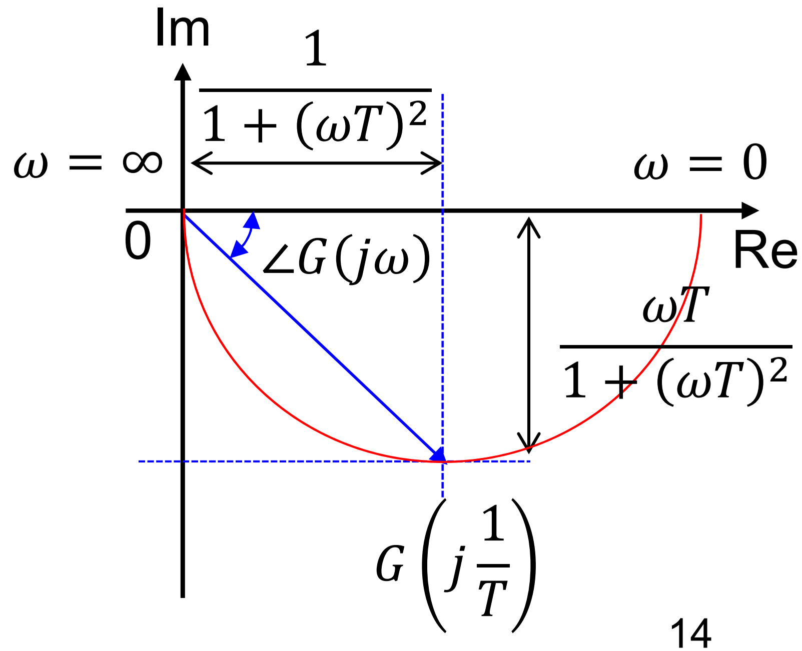
- 積分要素$G(s) = \frac{1}{s}$
  - 周波数伝達関数
    - $G(j\omega) = \frac{1}{j\omega} = -j\frac{1}{\omega} = \frac{1}{\omega}\angle-90^{\circ}$
  - 虚軸の負の部分
- 微分要素$G(s) = s$
  - 周波数伝達関数
    - $G(j\omega) = j\omega = \omega\angle 90^{\circ}$
  - 虚軸の正の部分

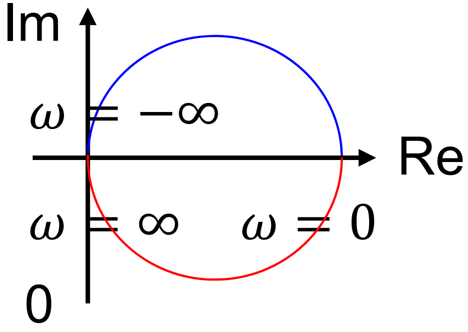


ナイキスト線図
一次のシステム1

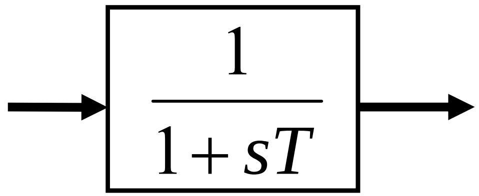


- 一次のシステム$G(s) = \frac{1}{1+sT}$
  - 周波数伝達関数
    - $G(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega T} = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega T)^2}} \angle \tan^{-1} \omega T$
      - $\omega = 0 \Rightarrow\ G(j0) = 1\angle 0^\circ$
      - $\omega = \frac{1}{T} \Rightarrow\ G\left(j\frac{1}{T}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\angle -45^\circ$
      - $\omega = \infty \Rightarrow\ G(j\infty) = 0\angle -90^\circ$
    - 下半円となる





ナイキスト線図
一次のシステム2



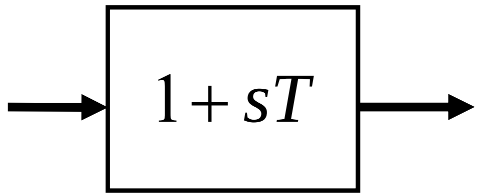
- 円になる説明
  - $G(j\omega)=\frac{1}{1+j\omega T}=\frac{1-j\omega T}{(1+j\omega T)(1-j\omega T)}=\frac{1-j\omega T}{1+(\omega T)^2}$
    - 実部:$X=\frac{1}{1+(\omega T)^2}$, 虚部:$Y=\frac{-\omega T}{1+(\omega T)^2}$
    - $\left(X-\frac{1}{2}\right)^2+Y^2=\left(\frac{1}{1+(\omega T)^2}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{-\omega T}{1+(\omega T)^2}\right)^2$

$$=\frac{(2-[1+(\omega T)^2])^2}{2^2(1+(\omega T)^2)^2}+\frac{(\omega T)^2}{(1+(\omega T)^2)^2}$$

$$=\frac{(1-(\omega T)^2)^2+4(\omega T)^2}{2^2(1+(\omega T)^2)^2}=\frac{(1+(\omega T)^2)^2}{2^2(1+(\omega T)^2)^2}=\frac{1}{2^2}$$

- $0\leq\omega\leq\infty$で下半円
- $-\infty\leq\omega\leq 0$で上半円

ナイキスト線図
一次のシステム3



- 一次のシステム$G(s) = 1 + sT$
  - 周波数伝達関数
    - $G(j\omega) = 1 + j\omega T = \sqrt{1+(\omega T)^2}\angle \tan^{-1}\omega T$
      - (1,0)を通り上に伸びる直線
        - » $G(s) = \frac{1}{1+sT}$と全く異なる形
          - » ボード線図は対称