応用システム工学
第一回　モデルベース状態推定

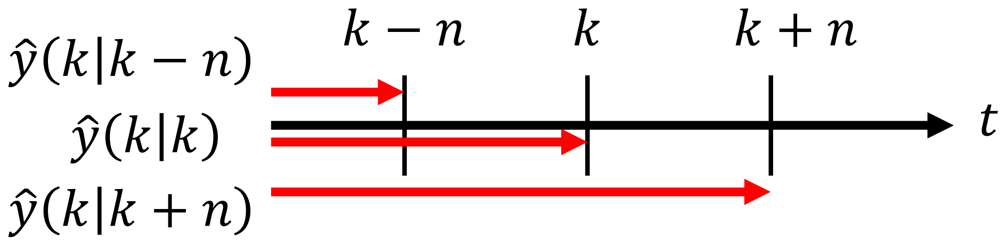
平成27年4月10日

E6-111

状態推定

- 対象
  - 全ての状態量が観測できない
  - 観測雑音が混入
- フィルターの種類
  - ウィナーフィルター:伝達関数形式
  - カルマンフィルター:状態空間形式
    - 状態方程式
    - 出力方程式

推定問題の分類



- 予測値:$\hat{y}(k|k-n)$
  - 時刻$k-n$までの過去のデータをもとに現在の値$y(k)$を推定
- フィルタリング値:$\hat{y}(k|k)$
  - 現時刻kを含む過去のデータをもとに現在の値$y(k)$を推定
- 平滑値:$\hat{y}(k|k+n)$
  - 現時刻$k+n$までの未来のデータをもとに現在の値$y(k)$を推定

最少二乗推定

- 確率変数x(温度等の物理量)の測定
  - 平均: $\mathrm{E}[x] = \bar{x}$
  - 分散: $\mathrm{E}[(x - \bar{x})^2] = {\sigma_x}^2$
- 観測方程式(センサ出力): $y = cx + w$
  - 観測値: y
  - 観測雑音: w
    - 平均: $\mathrm{E}[w] = \overline{w}$
    - 分散: $\mathrm{E}[(w - \overline{w})^2] = {\sigma_w}^2$
  - 変換係数: c

仮定:
xとwは
無相関

既知

xの推定値$\hat{x}$を求める

- 線形推定則: $\hat{x} = f(x) = \alpha y + \beta$
- 推定誤差: $e = x - \hat{x}$
- 平均二乗誤差を最小化するα,βを求める
  - 推定ゲイン:α
- 推定誤差に対する条件
  - 不偏推定値:$\hat{x}$は偏りを持たない
    - 一次モーメント$\mathrm{E}[e]$ (推定誤差平均値)が0
  - 最少分散推定値:
    - 二次モーメント$\mathrm{E}[(e - \mathrm{E}[e])^2]$ (推定誤差分散)の最小化

一次モーメントの条件

- $$\begin{aligned} \mathrm{E}[e] &= \mathrm{E}[x - \hat{x}] \\ &= \mathrm{E}[x - \alpha y - \beta] \\ &= \mathrm{E}[x - \alpha(cx + w) - \beta] \\ &= \mathrm{E}[(1 - \alpha c)x - \alpha w - \beta] \\ &= (1 - \alpha c)\bar{x} - \alpha\overline{w} - \beta = 0 \end{aligned}$$
- 条件: $\beta = (1 - \alpha c)\bar{x} - \alpha\overline{w}$

二次モーメントの条件

- $\mathrm{E}[(e-\mathrm{E}[e])^2]$
  $= \mathrm{E}[(\{x-\alpha y-\beta\}-\{(1-\alpha c)\bar{x}-\alpha\bar{w}-\beta\})^2]$
  $= \mathrm{E}[(x-\alpha\{cx+w\}-\beta-(1-\alpha c)\bar{x}+\alpha\bar{w}+\beta)^2]$
  $= \mathrm{E}[(\{1-\alpha c\}\{x-\bar{x}\}-\alpha\{w-\bar{w}\})^2]$
  $= \mathrm{E}[(1-\alpha c)^2(x-\bar{x})^2$
  $-2(1-\alpha c)\alpha(x-\bar{x})(w-\bar{w})+\alpha^2(w-\bar{w})^2]$
  $= (1-\alpha c)^2\mathrm{E}[(x-\bar{x})^2]$
  $-2(1-\alpha c)\alpha\mathrm{E}[(x-\bar{x})(w-\bar{w})]+\alpha^2\mathrm{E}[(w-\bar{w})^2]$
  $= (1-\alpha c)^2{\sigma_x}^2+\alpha^2{\sigma_w}^2$
  - xとwは無相関なので$\mathrm{E}[(x-\bar{x})(w-\bar{w})]=0$
  - βと関係なくαを選べる

二次モーメントの条件

- $\mathrm{E}[(e-\mathrm{E}[e])^2] = (1-\alpha c)^2{\sigma_x}^2 + \alpha^2{\sigma_w}^2$
  $= (c^2{\sigma_x}^2 + {\sigma_w}^2)\alpha^2 - 2c{\sigma_x}^2\alpha + {\sigma_x}^2$
  - αの二次関数．下に凸．極値をとる条件
    - $\frac{d}{d\alpha}\mathrm{E}[(e-\mathrm{E}[e])^2] = 2(c^2{\sigma_x}^2 + {\sigma_w}^2)\alpha - 2c{\sigma_x}^2 = 0$
    - $\alpha = \frac{c{\sigma_x}^2}{c^2{\sigma_x}^2+{\sigma_w}^2}$
      - $\mathrm{E}[(e-\mathrm{E}[e])^2] = \frac{\left(c{\sigma_x}^2\right)^2}{c^2{\sigma_x}^2+{\sigma_w}^2} - \frac{2\left(c{\sigma_x}^2\right)^2}{c^2{\sigma_x}^2+{\sigma_w}^2} + {\sigma_x}^2$
        $= \frac{{\sigma_x}^2{\sigma_w}^2}{c^2{\sigma_x}^2 + {\sigma_w}^2}$

信号対雑音比(SNR)

- 信号雑音比: SNR= $\frac{{\sigma_x}^2}{{\sigma_w}^2}$
- 推定ゲイン:$\alpha = \frac{c{\sigma_x}^2}{c^2{\sigma_x}^2+{\sigma_w}^2} = \frac{c}{c^2+\frac{1}{\mathrm{SNR}}}$
  - $c = 1$において
    - 雑音がない($\mathrm{SNR} = 1$)場合:$\alpha = 1$
    - 雑音の分散が${\sigma_w}^2$大きくなると:$\alpha \to 0$
    - 推定ゲインの範囲:$0 < \alpha \leq 1$

雑音と推定値の関係

- 事後推定値:$\hat{x} = \alpha y + \beta$
$$= \alpha y + (1 - \alpha c)\bar{x} - \alpha \overline{w}$$
$$= \bar{x} + \alpha\{y - (c\bar{x} + \overline{w})\}$$
  - 雑音の仮定:$\overline{w} = 0$
    - $\hat{x} = \bar{x} + \alpha\{y - c\bar{x}\}$
  - 係数の簡略化: $c = 1$
    - $\hat{x} = \bar{x} + \alpha\{y - \bar{x}\} = (1 - \alpha)\bar{x} + \alpha y$
      - 事後推定値$\hat{x}$は，事前推定値$\bar{x}$と観測値yの重み付平均

最少二乗推定値$\hat{x}$と推定誤差eの相関

- $\mathrm{E}[\hat{x}e] = \mathrm{E}[\langle\bar{x} + \alpha\{y - (c\bar{x} + \bar{w})\}\rangle e]$
  $= \langle\bar{x} + \alpha(c\bar{x} + \bar{w})\rangle \mathrm{E}[e] + \alpha\mathrm{E}[ye]$
  $= \alpha\mathrm{E}[ye]$
  - $\mathrm{E}[e] = 0$
- $\mathrm{E}[ye] = \mathrm{E}[y(x - \hat{x})]$
  $= \mathrm{E}[(cx + w)(x - \langle\bar{x} + \alpha\{y - (c\bar{x} + \bar{w})\}\rangle)]$
  $= \mathrm{E}[(cx + w)(x$
  $- \langle\bar{x} + \alpha\{(cx + w) - (c\bar{x} + \bar{w})\}\rangle)]$

最少二乗推定値$\hat{x}$と推定誤差eの相関

- $\mathrm{E}[ye] = \mathrm{E}[(cx + w)(x - \bar{x} - \alpha\{(cx + w) - (c\bar{x} + \overline{w})\})]$
  $= \mathrm{E}[(cx + w)(x - \bar{x}$
  $- \alpha\{c(x - \bar{x}) + (w - \overline{w})\})]$
  $= \mathrm{E}[(cx + w)\{(1 - \alpha c)(x - \bar{x})$
  $- \alpha(w - \overline{w})\}]$
  $= c(1 - \alpha c)\mathrm{E}[x(x - \bar{x})] - \alpha\mathrm{E}[w(w - \overline{w})]$

最少二乗推定値$\hat{x}$と推定誤差eの相関

- $\mathrm{E}[ye] = c\left(1 - \frac{c{\sigma_x}^2}{c^2{\sigma_x}^2 + {\sigma_w}^2}c\right)\mathrm{E}[x(x-\bar{x})] - \frac{c{\sigma_x}^2}{c^2{\sigma_x}^2 + {\sigma_w}^2}\mathrm{E}[w(w-\bar{w})]$
$$= c\left(1 - \frac{c{\sigma_x}^2}{c^2{\sigma_x}^2 + {\sigma_w}^2}c\right){\sigma_x}^2 - \frac{c{\sigma_x}^2}{c^2{\sigma_x}^2 + {\sigma_w}^2}{\sigma_w}^2$$
$$= c\,\frac{c^2{\sigma_x}^2 + {\sigma_w}^2 - c^2{\sigma_x}^2 - {\sigma_w}^2}{c^2{\sigma_x}^2 + {\sigma_w}^2}{\sigma_x}^2$$
$$= 0$$

$\mathrm{E}[\hat{x}e] = \alpha\mathrm{E}[ye] = 0$となる