応用システム工学
第二回　モデルベース状態推定

平成27年4月17日

E6-111

多変数での最小二乗推定

- 観測方程式:

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{w}$$

  – 観測ベクトル($n \times 1$):

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

  – 信号ベクトル($n \times 1$):

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

  – 雑音ベクトル($n \times 1$):

$$\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$$

  – 観測行列($n \times n$):

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

多変数での最小二乗推定

- 平均値ベクトル
  - 信号:$\mathrm{E}[\boldsymbol{x}] = \bar{\boldsymbol{x}}$
  - 観測雑音:$\mathrm{E}[\boldsymbol{w}] = \bar{\boldsymbol{w}}$
  - 観測値出力:$\mathrm{E}[\boldsymbol{y}] = \mathrm{E}[\boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{w}] = \boldsymbol{C}\bar{\boldsymbol{x}} + \bar{\boldsymbol{w}}$
- 共分散行列
  - 信号: $\mathrm{E}[(\boldsymbol{x} - \bar{\boldsymbol{x}})(\boldsymbol{x} - \bar{\boldsymbol{x}})^{\mathrm{T}}] = \boldsymbol{\Sigma}_x$
  - 観測雑音: $\mathrm{E}[(\boldsymbol{w} - \bar{\boldsymbol{w}})(\boldsymbol{w} - \bar{\boldsymbol{w}})^{\mathrm{T}}] = \boldsymbol{\Sigma}_w$
  - ただし$\boldsymbol{\Sigma}_x$, $\boldsymbol{\Sigma}_w$は正定値対称行列となる
  - $\mathrm{E}[(\boldsymbol{x} - \bar{\boldsymbol{x}})(\boldsymbol{w} - \bar{\boldsymbol{w}})^{\mathrm{T}}] = \boldsymbol{\Sigma}_{xw} = 0$
    - $\boldsymbol{x}$と$\boldsymbol{w}$は無相関なので，共分散行列は0

多変数での最小二乗推定

- 観測値出力の共分散行列
  - $\mathrm{E}[(\boldsymbol{y}-\mathrm{E}[\boldsymbol{y}])(\boldsymbol{y}-\mathrm{E}[\boldsymbol{y}])^{\mathrm{T}}]$
    $=\mathrm{E}[(\{\boldsymbol{Cx}+\boldsymbol{w}\}\ -\{\boldsymbol{C\overline{x}}+\overline{\boldsymbol{w}}\})(\{\boldsymbol{Cx}+\boldsymbol{w}\}$
    $-\{\boldsymbol{C\overline{x}}+\overline{\boldsymbol{w}}\})^{\mathrm{T}}]$
    $=\mathrm{E}[(\boldsymbol{C}\{\boldsymbol{x}-\overline{\boldsymbol{x}}\}\ -\{\boldsymbol{w}-\overline{\boldsymbol{w}}\})(\boldsymbol{C}\{\boldsymbol{x}-\overline{\boldsymbol{x}}\}$
    $-\{\boldsymbol{w}-\overline{\boldsymbol{w}}\})^{\mathrm{T}}]$
    $=\mathrm{E}[(\boldsymbol{C}\{\boldsymbol{x}-\overline{\boldsymbol{x}}\}\ -\{\boldsymbol{w}-\overline{\boldsymbol{w}}\})(\{\boldsymbol{x}-\overline{\boldsymbol{x}}\}^{T}\boldsymbol{C}^{T}$
    $-\{\boldsymbol{w}-\overline{\boldsymbol{w}}\}^{T})]$
    $=\mathrm{E}[\boldsymbol{C}\{\boldsymbol{x}-\overline{\boldsymbol{x}}\}\{\boldsymbol{x}-\overline{\boldsymbol{x}}\}^{T}\boldsymbol{C}^{T}-\{\boldsymbol{w}-\overline{\boldsymbol{w}}\}\{\boldsymbol{x}-\overline{\boldsymbol{x}}\}^{T}\boldsymbol{C}^{T}$
    $-\boldsymbol{C}\{\boldsymbol{x}-\overline{\boldsymbol{x}}\}\{\boldsymbol{w}-\overline{\boldsymbol{w}}\}^{T}+\{\boldsymbol{w}-\overline{\boldsymbol{w}}\}\{\boldsymbol{w}-\overline{\boldsymbol{w}}\}^{T}]$

多変数での最小二乗推定

- 出力の共分散行列
  - $\mathrm{E}[(\boldsymbol{y}-\mathrm{E}[\boldsymbol{y}])(\boldsymbol{y}-\mathrm{E}[\boldsymbol{y}])^{\mathrm{T}}]$

$$
\begin{aligned}
&= \mathrm{E}[\boldsymbol{C}\{\boldsymbol{x}-\overline{\boldsymbol{x}}\}\{\boldsymbol{x}-\overline{\boldsymbol{x}}\}^T\boldsymbol{C}^T] \\
&- \mathrm{E}[\{\boldsymbol{w}+\overline{\boldsymbol{w}}\}\{\boldsymbol{x}-\overline{\boldsymbol{x}}\}^T\boldsymbol{C}^T] \\
&- \mathrm{E}[\boldsymbol{C}\{\boldsymbol{x}-\overline{\boldsymbol{x}}\}\{\boldsymbol{w}-\overline{\boldsymbol{w}}\}^T] + \mathrm{E}[\{\boldsymbol{w}-\overline{\boldsymbol{w}}\}\{\boldsymbol{w}-\overline{\boldsymbol{w}}\}^T] \\
&= \boldsymbol{C}\mathrm{E}[\{\boldsymbol{x}-\overline{\boldsymbol{x}}\}\{\boldsymbol{x}-\overline{\boldsymbol{x}}\}^T]\boldsymbol{C}^T \\
&- \mathrm{E}[\{\boldsymbol{w}-\overline{\boldsymbol{w}}\}\{\boldsymbol{x}-\overline{\boldsymbol{x}}\}^T]\boldsymbol{C}^T \\
&- \boldsymbol{C}\mathrm{E}[\{\boldsymbol{x}-\overline{\boldsymbol{x}}\}\{\boldsymbol{w}-\overline{\boldsymbol{w}}\}^T] + \mathrm{E}[\{\boldsymbol{w}-\overline{\boldsymbol{w}}\}\{\boldsymbol{w}-\overline{\boldsymbol{w}}\}^T] \\
&= \boldsymbol{C}\boldsymbol{\Sigma}_x\boldsymbol{C}^T - \boldsymbol{\Sigma}_{xw}\boldsymbol{C}^T - \boldsymbol{C}\boldsymbol{\Sigma}_{xw} + \boldsymbol{\Sigma}_w \\
&= \boldsymbol{C}\boldsymbol{\Sigma}_x\boldsymbol{C}^T + \boldsymbol{\Sigma}_w
\end{aligned}
$$

$\boldsymbol{\Sigma}_{xw}=0$より

多変数での最小二乗推定

- 線形推定則: $\hat{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{d}$
  - $\boldsymbol{F}$:$n \times n$ゲイン行列
  - $\boldsymbol{d}$:$n \times 1$係数ベクトル
- 推定誤差ベクトル:$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{x}}$
  - 平均値0となる条件
    - $$\begin{aligned}\mathrm{E}[\boldsymbol{e}] = \mathrm{E}[\boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{x}}] &= \mathrm{E}[\boldsymbol{x} - \boldsymbol{F}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{d}] \\ &= \mathrm{E}[\boldsymbol{x}] - \boldsymbol{F}\mathrm{E}[\boldsymbol{y}] - \mathrm{E}[\boldsymbol{d}] \\ &= \overline{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{C}\overline{\boldsymbol{x}} + \overline{\boldsymbol{w}}) - \boldsymbol{d} = \boldsymbol{0}\end{aligned}$$
    - $\boldsymbol{d} = \overline{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{C}\overline{\boldsymbol{x}} + \overline{\boldsymbol{w}}) = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{F}\boldsymbol{C})\overline{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{F}\overline{\boldsymbol{w}}$

多変数での最小二乗推定

- 推定誤差ベクトルの共分散行列（誤差共分散行列）$\boldsymbol{P} = \mathrm{E}[\boldsymbol{e}\boldsymbol{e}^T]$を最小化する
  - $\boldsymbol{P} = \mathrm{E}[(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{F}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{d})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{F}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{d})^T]$
    $= \mathrm{E}[(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{F}\{\boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{w}\}$
    $- \boldsymbol{d})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{F}\{\boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{w}\} - \boldsymbol{d})^T]$
    - $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{w}) - \boldsymbol{d} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{F}\boldsymbol{C})\boldsymbol{x} - \boldsymbol{F}\boldsymbol{w} - \boldsymbol{d}$
      $= (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{F}\boldsymbol{C})\boldsymbol{x} - \boldsymbol{F}\boldsymbol{w} - \{(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{F}\boldsymbol{C})\overline{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{F}\overline{\boldsymbol{w}}\}$
      $= (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{F}\boldsymbol{C})(\boldsymbol{x} - \overline{\boldsymbol{x}}) - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{w} - \overline{\boldsymbol{w}})$より
  - $\boldsymbol{P} = \mathrm{E}[\{(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{F}\boldsymbol{C})(\boldsymbol{x} - \overline{\boldsymbol{x}}) - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{w} - \overline{\boldsymbol{w}})\}\{(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{F}\boldsymbol{C})(\boldsymbol{x} - \overline{\boldsymbol{x}}) - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{w} - \overline{\boldsymbol{w}})\}^T]$

多変数での最小二乗推定

- $\boldsymbol{P} = \mathrm{E}\left[\{(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{FC})(\boldsymbol{x} - \overline{\boldsymbol{x}}) - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{w} - \overline{\boldsymbol{w}})\}\{(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{FC})(\boldsymbol{x} - \overline{\boldsymbol{x}}) - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{w} - \overline{\boldsymbol{w}})\}^T\right]$
$= \mathrm{E}\left[(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{FC})(\boldsymbol{x} - \overline{\boldsymbol{x}})(\boldsymbol{x} - \overline{\boldsymbol{x}})^T(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{FC})^T\right.$
$- (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{FC})(\boldsymbol{x} - \overline{\boldsymbol{x}})(\boldsymbol{w} - \overline{\boldsymbol{w}})^T\boldsymbol{F}^T$
$- \boldsymbol{F}(\boldsymbol{w} - \overline{\boldsymbol{w}})(\boldsymbol{x} - \overline{\boldsymbol{x}})^T(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{FC})^T$
$\left. + \boldsymbol{F}(\boldsymbol{w} - \overline{\boldsymbol{w}})(\boldsymbol{w} - \overline{\boldsymbol{w}})^T\boldsymbol{F}^T\right]$
$= (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{FC})\boldsymbol{\Sigma}_x(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{FC})^T - (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{FC})\boldsymbol{\Sigma}_{xw}\boldsymbol{F}^T$
$- \boldsymbol{F}\boldsymbol{\Sigma}_{wx}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{FC})^T + \boldsymbol{F}\boldsymbol{\Sigma}_w\boldsymbol{F}^T$
$= (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{FC})\boldsymbol{\Sigma}_x(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{FC})^T + \boldsymbol{F}\boldsymbol{\Sigma}_w\boldsymbol{F}^T$

$\boldsymbol{\Sigma}_{xw} = 0$より

多変数での最小二乗推定

- $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{FC})\boldsymbol{\Sigma}_x(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{FC})^T + \boldsymbol{F\Sigma}_w\boldsymbol{F}^T$
  $= (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{FC})\boldsymbol{\Sigma}_x(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{C}^T\boldsymbol{F}^T) + \boldsymbol{F\Sigma}_w\boldsymbol{F}^T$
  $= \boldsymbol{\Sigma}_x - \boldsymbol{\Sigma}_x\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{F}^T - \boldsymbol{FC\Sigma}_x + \boldsymbol{FC\Sigma}_x\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{F}^T$
  $+ \boldsymbol{F\Sigma}_w\boldsymbol{F}^T$
  $= \boldsymbol{F}(\boldsymbol{C\Sigma}_x\boldsymbol{C}^T + \boldsymbol{\Sigma}_w)\boldsymbol{F}^T - \boldsymbol{\Sigma}_x\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{F}^T - \boldsymbol{FC\Sigma}_x$
  $+ \boldsymbol{\Sigma}_x$
  $= \boldsymbol{FAF}^T - \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{F}^T - \boldsymbol{FB} + \boldsymbol{\Sigma}_x$
  - $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{C\Sigma}_x\boldsymbol{C}^T + \boldsymbol{\Sigma}_w$
  - $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C\Sigma}_x,\ \boldsymbol{B}^T = {\boldsymbol{\Sigma}_x}^T\boldsymbol{C}^T = \boldsymbol{\Sigma}_x\boldsymbol{C}^T$

多変数での最小二乗推定

- ここで$\boldsymbol{A}$は対称である性質${\boldsymbol{A}^{-1}}^{T} = \boldsymbol{A}^{-1}$を利用する
  - $\boldsymbol{FAF}^T - \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{F}^T - \boldsymbol{FB} = \boldsymbol{FAF}^T - \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{AF}^T - \boldsymbol{FA}{\boldsymbol{A}^{-1}}^T\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}{\boldsymbol{A}^{-1}}^T\boldsymbol{B} - \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$
    $= \boldsymbol{FA}\left(\boldsymbol{F}^T - {\boldsymbol{A}^{-1}}^T\boldsymbol{B}\right) - \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{F}^T - {\boldsymbol{A}^{-1}}^T\boldsymbol{B}\right) - \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{B}$
    $= \left(\boldsymbol{F} - \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^{-\mathbf{1}}\right)\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{F}^T - {\boldsymbol{A}^{-1}}^T\boldsymbol{B}\right) - \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{B}$

多変数での最小二乗推定

- $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{A}\boldsymbol{F}^T - \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{F}^T - \boldsymbol{F}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{\Sigma}_x$
  $= \left(\boldsymbol{F} - \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^{-1}\right)\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{F}^T - {\boldsymbol{A}^{-1}}^T\boldsymbol{B}\right) - \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{\Sigma}_x$
  $= \left(\boldsymbol{F} - \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^{-1}\right)\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{F} - \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^{-1}\right)^T - \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{\Sigma}_x$
  - 二次形式$\boldsymbol{x}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^T$
  - 二次方程式の平方完成
    - $f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$
  - $\boldsymbol{P}$は$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^{-1}$において最小値$-\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{\Sigma}_x$をとる
    - $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^{-1} = (\boldsymbol{C}\boldsymbol{\Sigma}_x)^T(\boldsymbol{C}\boldsymbol{\Sigma}_x\boldsymbol{C}^T + \boldsymbol{\Sigma}_w)^{-1}$

多変数での最小二乗推定

- 最小二乗推定値
  - $\hat{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{d} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{y} + (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{F}\boldsymbol{C})\overline{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{F}\overline{\boldsymbol{w}}$
    $= \overline{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{F}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{C}\overline{\boldsymbol{x}} - \overline{\boldsymbol{w}})$
    $= \overline{\boldsymbol{x}} + (\boldsymbol{C}\boldsymbol{\Sigma}_x)^T(\boldsymbol{C}\boldsymbol{\Sigma}_x\boldsymbol{C}^T + \boldsymbol{\Sigma}_w)^{-1}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{C}\overline{\boldsymbol{x}} - \overline{\boldsymbol{w}})$
- 推定誤差共分散行列最小値
  - $\boldsymbol{P} = -\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^{-\boldsymbol{1}}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{\Sigma}_x$
    $= -\boldsymbol{\Sigma}_x\boldsymbol{C}^T(\boldsymbol{C}\boldsymbol{\Sigma}_x\boldsymbol{C}^T + \boldsymbol{\Sigma}_w)^{-\boldsymbol{1}}\boldsymbol{C}\boldsymbol{\Sigma}_x + \boldsymbol{\Sigma}_x$

多変数での最小二乗推定

- 逆行列補題:$(A+BC)^{-1}=A^{-1}-A^{-1}B(I+CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1}$
  - $(A+BC)^{-1}(A+BC)=\{A^{-1}-A^{-1}B(I+CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1}\}(A+BC)$
    $=A^{-1}A-A^{-1}B(I+CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1}$
    $A+A^{-1}BC-A^{-1}B(I+CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1}BC$
    $=I-A^{-1}B(I+CA^{-1}B)^{-1}C+A^{-1}BC$
    $-A^{-1}B(I+CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1}BC$
    $=I$
    $-A^{-1}B\{(I+CA^{-1}B)^{-1}-I$
    $+(I+CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1}B\}C$

多変数での最小二乗推定

- 逆行列補題つづき
- ここで
  - $(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})^{-1}-\boldsymbol{I}+(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$
    $=(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})^{-1}-(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})^{-1}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})$
    $+(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$
    $=(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})^{-1}\{\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\}$
    $=0$
- なので
  - $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{C})^{-1}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{C})=\boldsymbol{I}$となる

多変数での最小二乗推定

- 推定誤差共分散行列最小値の簡略表記
  - $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Sigma}_x - \boldsymbol{\Sigma}_x \boldsymbol{C}^T (\boldsymbol{C}\boldsymbol{\Sigma}_x \boldsymbol{C}^T + \boldsymbol{\Sigma}_w)^{-1} \boldsymbol{C}\boldsymbol{\Sigma}_x$
    $= \boldsymbol{\Sigma}_x - \boldsymbol{\Sigma}_x \boldsymbol{C}^T (\boldsymbol{C}\boldsymbol{\Sigma}_x \boldsymbol{C}^T + \boldsymbol{\Sigma}_w)^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_w{}^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_w \boldsymbol{C}\boldsymbol{\Sigma}_x$
    $= \boldsymbol{\Sigma}_x - \boldsymbol{\Sigma}_x \boldsymbol{C}^T \left\{ \boldsymbol{\Sigma}_w{}^{-1} (\boldsymbol{C}\boldsymbol{\Sigma}_x \boldsymbol{C}^T + \boldsymbol{\Sigma}_w) \right\}^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_w \boldsymbol{C}\boldsymbol{\Sigma}_x$
    $= \boldsymbol{\Sigma}_x - \boldsymbol{\Sigma}_x \boldsymbol{C}^T \left\{ \boldsymbol{\Sigma}_w{}^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_w + \boldsymbol{\Sigma}_w{}^{-1} \boldsymbol{C}\boldsymbol{\Sigma}_x \boldsymbol{C}^T \right\}^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_w \boldsymbol{C}\boldsymbol{\Sigma}_x$
    $= \left(\boldsymbol{\Sigma}_x{}^{-1} + \boldsymbol{C}^T \boldsymbol{\Sigma}_w{}^{-1} \boldsymbol{C} \right)^{-1}$

多変数での最小二乗推定

- ゲイン行列の簡略表記
  - $\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{C\Sigma}_x)^T(\boldsymbol{C\Sigma}_x\boldsymbol{C}^T + \boldsymbol{\Sigma}_w)^{-1}$

$$= \boldsymbol{\Sigma}_x{}^T\boldsymbol{C}^T(\boldsymbol{C\Sigma}_x\boldsymbol{C}^T + \boldsymbol{\Sigma}_w)^{-1}$$
$$= \boldsymbol{\Sigma}_x\boldsymbol{C}^T(\boldsymbol{C\Sigma}_x\boldsymbol{C}^T + \boldsymbol{\Sigma}_w)^{-1}$$
$$= \boldsymbol{\Sigma}_x\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{\Sigma}_w{}^{-1} - \boldsymbol{\Sigma}_x\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{\Sigma}_w{}^{-1}$$
$$+ \boldsymbol{\Sigma}_x\boldsymbol{C}^T(\boldsymbol{C\Sigma}_x\boldsymbol{C}^T + \boldsymbol{\Sigma}_w)^{-1}$$
$$= \boldsymbol{\Sigma}_x\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{\Sigma}_w{}^{-1} - \boldsymbol{\Sigma}_x\boldsymbol{C}^T\left\{\boldsymbol{\Sigma}_w{}^{-1} - (\boldsymbol{C\Sigma}_x\boldsymbol{C}^T + \boldsymbol{\Sigma}_w)^{-1}\right\}$$
$$= \boldsymbol{\Sigma}_x\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{\Sigma}_w{}^{-1}$$
$$- \boldsymbol{\Sigma}_x\boldsymbol{C}^T(\boldsymbol{C\Sigma}_x\boldsymbol{C}^T + \boldsymbol{\Sigma}_w)^{-1}\left\{(\boldsymbol{C\Sigma}_x\boldsymbol{C}^T + \boldsymbol{\Sigma}_w)\boldsymbol{\Sigma}_w{}^{-1} - \boldsymbol{I}\right\}$$
$$= \boldsymbol{\Sigma}_x\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{\Sigma}_w{}^{-1} - \boldsymbol{\Sigma}_x\boldsymbol{C}^T(\boldsymbol{C\Sigma}_x\boldsymbol{C}^T + \boldsymbol{\Sigma}_w)^{-1}\boldsymbol{C\Sigma}_x\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{\Sigma}_w{}^{-1}$$

多変数での最小二乗推定

- ゲイン行列の簡略表記
  - $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{\Sigma}_x \boldsymbol{C}^T {\boldsymbol{\Sigma}_w}^{-1} - \boldsymbol{\Sigma}_x \boldsymbol{C}^T (\boldsymbol{C}\boldsymbol{\Sigma}_x \boldsymbol{C}^T + \boldsymbol{\Sigma}_w)^{-1} \boldsymbol{C}\boldsymbol{\Sigma}_x \boldsymbol{C}^T {\boldsymbol{\Sigma}_w}^{-1}$
    $= \{\boldsymbol{\Sigma}_x - \boldsymbol{\Sigma}_x \boldsymbol{C}^T (\boldsymbol{C}\boldsymbol{\Sigma}_x \boldsymbol{C}^T + \boldsymbol{\Sigma}_w)^{-1} \boldsymbol{C}\boldsymbol{\Sigma}_x\} \boldsymbol{C}^T {\boldsymbol{\Sigma}_w}^{-1}$
    $= \boldsymbol{P}\boldsymbol{C}^T {\boldsymbol{\Sigma}_w}^{-1}$