応用システム工学
第四回　モデルベース状態推定

平成27年5月29日

E6-111

多変数に対する最尤推定

- 変数観測方程式:

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{w}$$

  - 観測ベクトル$(n \times 1)$:

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

  - 信号ベクトル$(n \times 1)$:

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

  - 観測雑音ベクトル$(n \times 1)$:

$$\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$$

  - 観測行列$(n \times n)$:

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{w}$は正規性を仮定

多変数に対する最尤推定

- 平均値ベクトル
  - 信号:$\mathrm{E}[\boldsymbol{x}] = \overline{\boldsymbol{x}}$
  - 観測雑音:$\mathrm{E}[\boldsymbol{w}] = \overline{\boldsymbol{w}}$
  - 観測値:$\mathrm{E}[\boldsymbol{y}] = \mathrm{E}[\boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{w}] = \boldsymbol{C}\overline{\boldsymbol{x}} + \overline{\boldsymbol{w}}$
- 共分散行列
  - 信号: $\mathrm{E}[(\boldsymbol{x} - \overline{\boldsymbol{x}})(\boldsymbol{x} - \overline{\boldsymbol{x}})^{\mathrm{T}}] = \boldsymbol{\Sigma}_x$
  - 観測雑音: $\mathrm{E}[(\boldsymbol{w} - \overline{\boldsymbol{w}})(\boldsymbol{w} - \overline{\boldsymbol{w}})^{\mathrm{T}}] = \boldsymbol{\Sigma}_w$
  - 観測値: $\mathrm{E}[(\boldsymbol{y} - \mathrm{E}[\boldsymbol{y}])(\boldsymbol{y} - \mathrm{E}[\boldsymbol{y}])^{\mathrm{T}}] = \boldsymbol{C}\boldsymbol{\Sigma}_x\boldsymbol{C}^T + \boldsymbol{\Sigma}_w$

最小二乗を参照

多変数に対する最尤推定

- 確率密度関数(正規性)
  - $p_1(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \mathrm{det}\boldsymbol{\Sigma}_x}} e^{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\overline{\boldsymbol{x}})^T {\boldsymbol{\Sigma}_x}^{-1}(\boldsymbol{x}-\overline{\boldsymbol{x}})}$
  - $p_2(\boldsymbol{w}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \mathrm{det}\boldsymbol{\Sigma}_w}} e^{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{w}-\overline{\boldsymbol{w}})^T {\boldsymbol{\Sigma}_x}^{-1}(\boldsymbol{w}-\overline{\boldsymbol{w}})}$
- 信号$\boldsymbol{x}$に対する観測値$\boldsymbol{y}$の条件付確率密度関数
  - $p_2(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \mathrm{det}\boldsymbol{\Sigma}_w}} e^{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}-\overline{\boldsymbol{w}})^T {\boldsymbol{\Sigma}_w}^{-1}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}-\overline{\boldsymbol{w}})}$

多変数に対する最尤推定

- $\boldsymbol{y}$の周辺確率密度関数
  - $p_3(\boldsymbol{y}) =$
    $\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det(\boldsymbol{C}\boldsymbol{\Sigma}_x\boldsymbol{C}^T+\boldsymbol{\Sigma}_w)}} e^{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{y}-\overline{\boldsymbol{y}})^T\left(\boldsymbol{C}\boldsymbol{\Sigma}_x\boldsymbol{C}^T+\boldsymbol{\Sigma}_w\right)^{-1}(\boldsymbol{y}-\overline{\boldsymbol{y}})}$
- 観測値$\boldsymbol{y}$から信号$\boldsymbol{x}$の事後確率密度関数 $p(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y})$を求める

多変数に対する最尤推定

- 観測値$\boldsymbol{y}$の共分散行列の逆行列
  - $(\boldsymbol{C}\boldsymbol{\Sigma}_x\boldsymbol{C}^T+\boldsymbol{\Sigma}_w)^{-1}$
    $=\boldsymbol{\Sigma}_w{}^{-1}-\boldsymbol{\Sigma}_w{}^{-1}\boldsymbol{C}\left(\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{x}}{}^{-1}+\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{w}}{}^{-1}\boldsymbol{C}\right)^{-1}\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{\Sigma}_w{}^{-1}$
    $=\boldsymbol{\Sigma}_w{}^{-1}-\boldsymbol{\Sigma}_w{}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{P}\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{\Sigma}_w{}^{-1}$
    - ただし$\boldsymbol{P}=\left(\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{x}}{}^{-1}+\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{w}}{}^{-1}\boldsymbol{C}\right)^{-1}$
      $=\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{C}^T(\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{C}+\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{w}})^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{w}}$
      - 逆行列補題$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{C})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}$

多変数に対する最尤推定

- ベイズの定理
  - $p(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) = \frac{p_1(\boldsymbol{x})p_2(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x})}{p_3(\boldsymbol{y})}$

$$= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \mathrm{det}\boldsymbol{\Sigma}_x}} e^{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\overline{\boldsymbol{x}})^T \boldsymbol{\Sigma}_x{}^{-1}(\boldsymbol{x}-\overline{\boldsymbol{x}})}$$

$$\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \mathrm{det}\boldsymbol{\Sigma}_w}} e^{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}-\overline{\boldsymbol{w}})^T \boldsymbol{\Sigma}_w{}^{-1}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}-\overline{\boldsymbol{w}})}$$

$$\Big/ \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \mathrm{det}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{\Sigma}_x\boldsymbol{C}^T+\boldsymbol{\Sigma}_w)}} e^{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{y}-\overline{\boldsymbol{y}})^T\left(\boldsymbol{C}\boldsymbol{\Sigma}_x\boldsymbol{C}^T+\boldsymbol{\Sigma}_w\right)^{-1}(\boldsymbol{y}-\overline{\boldsymbol{y}})}$$

多変数に対する最尤推定

- ベイズの定理
  - $p(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) =$
    $$\sqrt{\frac{\det(\boldsymbol{C}\boldsymbol{\Sigma}_x\boldsymbol{C}^T+\boldsymbol{\Sigma}_w)}{(2\pi)^n\det\boldsymbol{\Sigma}_x\det\boldsymbol{\Sigma}_w}}\frac{e^{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\overline{\boldsymbol{x}})^T\boldsymbol{\Sigma}_x{}^{-1}(\boldsymbol{x}-\overline{\boldsymbol{x}})-\frac{1}{2}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}-\overline{\boldsymbol{w}})^T\boldsymbol{\Sigma}_W{}^{-1}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}-\overline{\boldsymbol{w}})}}{e^{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{y}-\overline{\boldsymbol{y}})^T\left(\boldsymbol{C}\boldsymbol{\Sigma}_X\boldsymbol{C}^T+\boldsymbol{\Sigma}_W\right)^{-1}(\boldsymbol{y}-\overline{\boldsymbol{y}})}}$$
    - ばらばらにして求める

多変数に対する最尤推定

- 分子の指数部
  - $(\boldsymbol{x}-\overline{\boldsymbol{x}})^T {\boldsymbol{\Sigma}_x}^{-1}(\boldsymbol{x}-\overline{\boldsymbol{x}})+(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}-\overline{\boldsymbol{w}})^T {\boldsymbol{\Sigma}_w}^{-1}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}-\overline{\boldsymbol{w}})$
    $=(\boldsymbol{x}-\overline{\boldsymbol{x}})^T {\boldsymbol{\Sigma}_x}^{-1}(\boldsymbol{x}-\overline{\boldsymbol{x}})$
    $+(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}-\overline{\boldsymbol{y}}+\boldsymbol{C}\overline{\boldsymbol{x}})^T {\boldsymbol{\Sigma}_w}^{-1}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}-\overline{\boldsymbol{y}}+\boldsymbol{C}\overline{\boldsymbol{x}})$
    $=(\boldsymbol{x}-\overline{\boldsymbol{x}})^T {\boldsymbol{\Sigma}_x}^{-1}(\boldsymbol{x}-\overline{\boldsymbol{x}})$
    $+(\boldsymbol{y}-\overline{\boldsymbol{y}}-\boldsymbol{C}[\boldsymbol{x}-\overline{\boldsymbol{x}}])^T {\boldsymbol{\Sigma}_w}^{-1}(\boldsymbol{y}-\overline{\boldsymbol{y}}-\boldsymbol{C}[\boldsymbol{x}-\overline{\boldsymbol{x}}])$

多変数に対する最尤推定

- 分子の指数部
  - $= (\boldsymbol{x}-\overline{\boldsymbol{x}})^T\left(\boldsymbol{\Sigma}_x{}^{-1}-\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{\Sigma}_w{}^{-1}\boldsymbol{C}\right)(\boldsymbol{x}-\overline{\boldsymbol{x}})+(\boldsymbol{y}-\overline{\boldsymbol{y}})^T\boldsymbol{\Sigma}_w{}^{-1}(\boldsymbol{y}-\overline{\boldsymbol{y}})-(\boldsymbol{x}-\overline{\boldsymbol{x}})^T\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{\Sigma}_w{}^{-1}(\boldsymbol{y}-\overline{\boldsymbol{y}})-(\boldsymbol{y}-\overline{\boldsymbol{y}})^T\boldsymbol{\Sigma}_w{}^{-1}\boldsymbol{C}(\boldsymbol{x}-\overline{\boldsymbol{x}})$
    $= \left[(\boldsymbol{x}-\overline{\boldsymbol{x}})-\boldsymbol{P}\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{\Sigma}_w{}^{-1}(\boldsymbol{y}-\overline{\boldsymbol{y}})\right]^T\boldsymbol{P}^{-\mathbf{1}}\left[(\boldsymbol{x}-\overline{\boldsymbol{x}})-\boldsymbol{P}\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{\Sigma}_w{}^{-1}(\boldsymbol{y}-\overline{\boldsymbol{y}})\right]$
    $+(\boldsymbol{y}-\overline{\boldsymbol{y}})^T\left(\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{w}}{}^{-1}-\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{w}}{}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{P}\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{w}}{}^{-1}\right)(\boldsymbol{y}-\overline{\boldsymbol{y}})$

$$\boldsymbol{P}=\left(\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{x}}{}^{-1}+\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{w}}{}^{-1}\boldsymbol{C}\right)^{-1}$$

多変数に対する最尤推定

- 分子の指数部
  - $\hat{\boldsymbol{x}} = \overline{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{C}^T{\boldsymbol{\Sigma}_w}^{-1}(\boldsymbol{y} - \overline{\boldsymbol{y}})$とおく
  - $= (\boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{x}})^T\boldsymbol{P}^{-\mathbf{1}}(\boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{x}}) + (\boldsymbol{y} - \overline{\boldsymbol{y}})^T\left({\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{w}}}^{-1} - {\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{w}}}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{P}\boldsymbol{C}^T{\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{w}}}^{-1}\right)(\boldsymbol{y} - \overline{\boldsymbol{y}})$

多変数に対する最尤推定

– ここで逆行列補題を適用
  - $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{C})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}$
  - $\left(\boldsymbol{\Sigma_w}^{-1}-\boldsymbol{\Sigma_w}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{P}\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{\Sigma_w}^{-1}\right)^{-1}$
    $=\boldsymbol{\Sigma_w}$
    $+\boldsymbol{\Sigma_w}\boldsymbol{\Sigma_w}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{P}\left(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{\Sigma_w}^{-1}\boldsymbol{\Sigma_w}\boldsymbol{\Sigma_w}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{P}\right)^{-1}\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{\Sigma_w}^{-1}\boldsymbol{\Sigma_w}$
    $=\boldsymbol{\Sigma_w}+\boldsymbol{C}\boldsymbol{P}\left(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{\Sigma_w}^{-1}\boldsymbol{\Sigma_w}\boldsymbol{\Sigma_w}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{P}\right)^{-1}\boldsymbol{C}^T$
    $=\boldsymbol{\Sigma_w}+\boldsymbol{C}\boldsymbol{P}\left\{\left(\boldsymbol{P}^{-1}-\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{\Sigma_w}^{-1}\boldsymbol{C}\right)\boldsymbol{P}\right\}^{-1}\boldsymbol{C}^T$
    $=\boldsymbol{\Sigma_w}+\boldsymbol{C}\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^{-1}\left(\boldsymbol{P}^{-1}-\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{\Sigma_w}^{-1}\boldsymbol{C}\right)^{-1}\boldsymbol{C}^T$
    $=\boldsymbol{\Sigma_w}+\boldsymbol{C}\left(\boldsymbol{P}^{-1}-\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{\Sigma_w}^{-1}\boldsymbol{C}\right)^{-1}\boldsymbol{C}^T$

多変数に対する最尤推定

- $\boldsymbol{P}^{-1} = \boldsymbol{\Sigma_x}^{-1} + \boldsymbol{C}^T\boldsymbol{\Sigma_w}^{-1}\boldsymbol{C}$より
  - $\boldsymbol{\Sigma_w} + \boldsymbol{C}\left(\boldsymbol{P}^{-1} - \boldsymbol{C}^T\boldsymbol{\Sigma_w}^{-1}\boldsymbol{C}\right)^{-1}\boldsymbol{C}^T$
    $= \boldsymbol{\Sigma_w} + \boldsymbol{C}\left(\boldsymbol{\Sigma_x}^{-1} + \boldsymbol{C}^T\boldsymbol{\Sigma_w}^{-1}\boldsymbol{C} - \boldsymbol{C}^T\boldsymbol{\Sigma_w}^{-1}\boldsymbol{C}\right)^{-1}\boldsymbol{C}^T$
    $= \boldsymbol{\Sigma_w} + \boldsymbol{C}\boldsymbol{\Sigma}_x\boldsymbol{C}^T$

– なので分子の指数部

– $= (\boldsymbol{x} - \widehat{\boldsymbol{x}})^T\boldsymbol{P}^{-\mathbf{1}}(\boldsymbol{x} - \widehat{\boldsymbol{x}}) + (\boldsymbol{y} - \overline{\boldsymbol{y}})^T(\boldsymbol{\Sigma_w} + \boldsymbol{C}\boldsymbol{\Sigma}_x\boldsymbol{C}^T)(\boldsymbol{y} - \overline{\boldsymbol{y}})$

多変数に対する最尤推定

- 分母の指数部を合成
  - $(\boldsymbol{x}-\widehat{\boldsymbol{x}})^T \boldsymbol{P}^{-\mathbf{1}}(\boldsymbol{x}-\widehat{\boldsymbol{x}})+(\boldsymbol{y}-\overline{\boldsymbol{y}})^T(\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{w}}+\boldsymbol{C}\boldsymbol{\Sigma}_x\boldsymbol{C}^T)(\boldsymbol{y}-\overline{\boldsymbol{y}})-(\boldsymbol{y}-\overline{\boldsymbol{y}})^T(\boldsymbol{C}\boldsymbol{\Sigma}_x\boldsymbol{C}^T+\overline{\boldsymbol{y}})=(\boldsymbol{x}-\widehat{\boldsymbol{x}})^T \boldsymbol{P}^{-\mathbf{1}}(\boldsymbol{x}-\widehat{\boldsymbol{x}})$
- $p(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y})=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det \boldsymbol{P}}}e^{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\widehat{\boldsymbol{x}})^T \boldsymbol{P}^{-\mathbf{1}}(\boldsymbol{x}-\widehat{\boldsymbol{x}})}$
- 観測値$\boldsymbol{y}$が与えられた時の信号$\boldsymbol{x}$の事後確率密度関数$p(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y})$が求まった
  - $p(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y})$は$\boldsymbol{x}=\widehat{\boldsymbol{x}}$で最大となる。$\widehat{\boldsymbol{x}}$:最尤推定値

カルマンフィルタ

- 雑音を含んだ時系列データ$y(k)$から，状態量$x(k)$を，状態空間モデルを用いて推定する
- 処理手順
  - モデリング:線形システムの状態空間モデルを構築
  - 状態推定:状態空間モデルの状態を時系列データから推定
  - 状態変数ベクトル$\boldsymbol{x}(k)$の最適推定値$\hat{\boldsymbol{x}}(k)$を求める最適フィルタの設計

線形離散時間状態空間モデル（線形時不変モデル）

- 状態方程式
  - $\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{b}v(k)$
    - $\boldsymbol{x}(k)$:n次ベクトル，$\boldsymbol{A}$:$n \times n$行列，$\boldsymbol{b}$:n次ベクトル，$v(k)$:システム雑音（正規性白色雑音）, 平均:0, 分散:${\sigma_v}^2$
- 出力方程式
  - $y(k) = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}(k) + w(k)$
    - $y(k)$:スカラー，$\boldsymbol{c}$:n次ベクトル，$w(k)$:観測雑音（正規性白色雑音）, 平均:0, 分散:${\sigma_w}^2$
    - $v(k)$と$w(k)$は互いに独立
    - $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$は既知。時間によらず一定（線形時不変）
      - $y(k)$は定常確率過程となる。平均，分散が不変。

最適推定値を求める

- 状態推定誤差:$\widetilde{\boldsymbol{x}}(k)$
  - $\widetilde{\boldsymbol{x}}(k) = \boldsymbol{x}(k) - \widehat{\boldsymbol{x}}(k)$
  - 推定値$\widehat{\boldsymbol{x}}(k)$と，真値$\boldsymbol{x}(k)$の差
- 評価関数:$J(k)$
  - $J(k) = \mathrm{E}[\widetilde{\boldsymbol{x}}(k)^2]$
  - 平均二乗誤差(ノルム)
- 最適推定値:$\widehat{\boldsymbol{x}}(k)$
  - $\widehat{\boldsymbol{x}}(k) = \arg\min\limits_{\boldsymbol{x}(k)} J(k)$
  - 関数値が最大となる定義域の元の集合