

# 応用システム工学

## 第六回 線形カルマンフィルタ

平成27年6月13日

E6-111

# 線形離散時間状態空間モデル (線形時不変モデル)

- 状態方程式

- $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{b}v(k)$

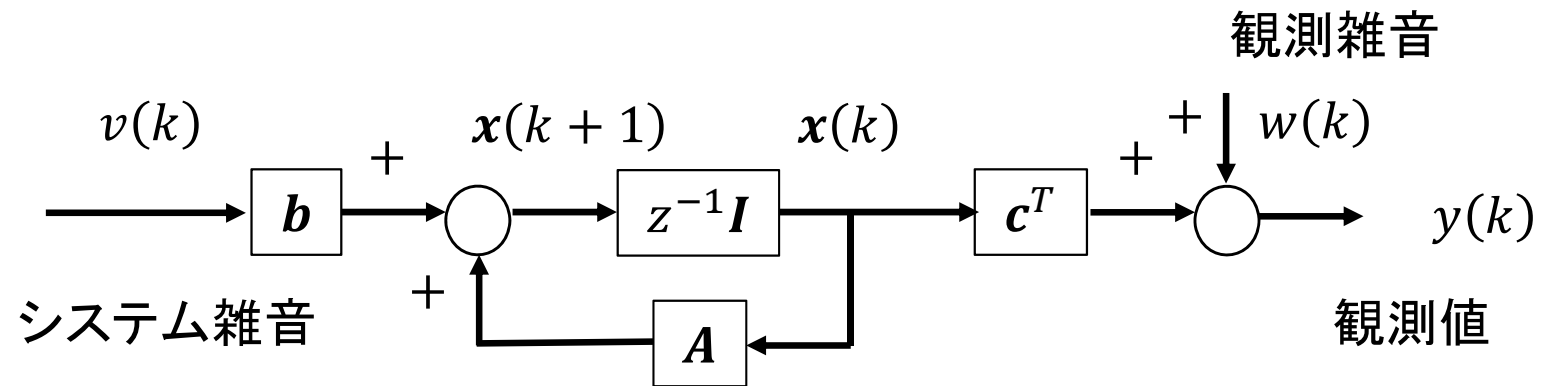
- $\mathbf{x}(k)$ :  $n$ 次ベクトル,  $\mathbf{A}$ :  $n \times n$ 行列,  $\mathbf{b}$ :  $n$ 次ベクトル,  $v(k)$ : システム雑音 (正規性白色雑音), 平均: 0, 分散:  $\sigma_v^2$

- 出力方程式

- $y(k) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(k) + w(k)$

- $y(k)$ : スカラー,  $\mathbf{c}$ :  $n$ 次ベクトル,  $w(k)$ : 観測雑音 (正規性白色雑音), 平均: 0, 分散:  $\sigma_w^2$
    - $v(k)$  と  $w(k)$  は互いに独立
    - $\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  は既知。時間によらず一定 (線形時不変)

# 状態空間モデルのブロック図



# カルマンフィルタの処理の流れ

- 初期値の設定

- 状態推定値  $\hat{\mathbf{x}}(0) = E[\mathbf{x}(0)] = \mathbf{x}_0$

- 正規性確率ベクトル  $N(\mathbf{x}_0, \Sigma_0)$

- $P(0) = E[\{\mathbf{x}(0) - E[\mathbf{x}(0)]\}\{\mathbf{x}(0) - E[\mathbf{x}(0)]\}^T] = \Sigma_0$

- $\hat{\mathbf{x}}(0) = 0, P(0) = \gamma I$ とすることが多い。 $\gamma$ は定数0~1000程度

- 雑音の分散

- システム雑音:  $\sigma_v^2$

- 観測雑音: 分散:  $\sigma_w^2$

# カルマンフィルタの処理の流れ

- 更新処理

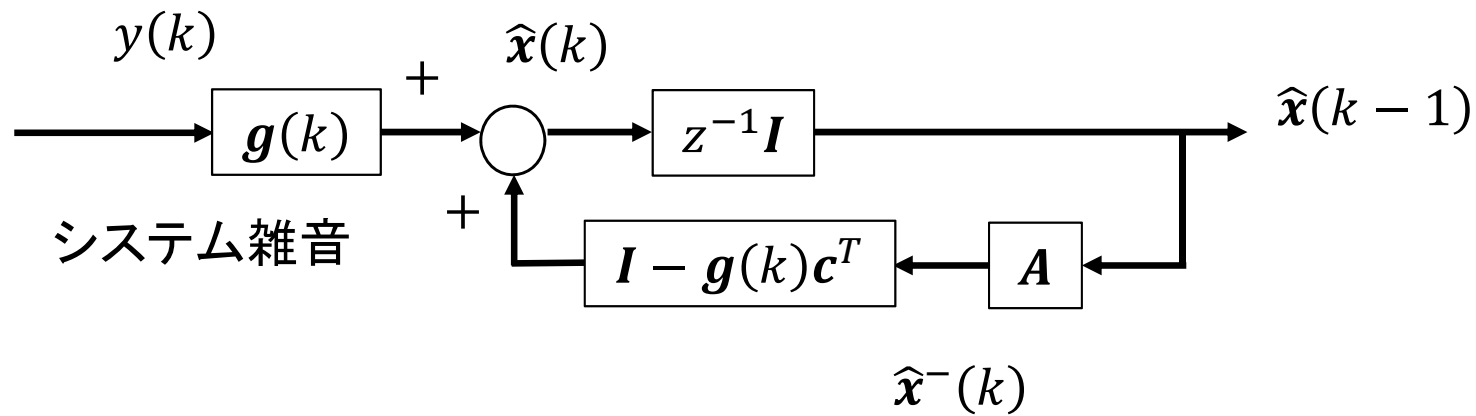
- 予測ステップ

- 事前状態推定値:  $\hat{\mathbf{x}}^-(k) = A\hat{\mathbf{x}}(k-1)$
    - 事前誤差共分散行列:  $P^-(k) = AP(k-1)A^T + \sigma_v^2 \mathbf{b}\mathbf{b}^T$

- フィルタリングステップ

- カルマンゲイン:  $\mathbf{g}(k) = \frac{P^-(k)\mathbf{c}}{\mathbf{c}^T P^-(k)\mathbf{c} + \sigma_w^2}$
    - 状態推定値:  $\hat{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{g}(k)\{y(k) - \mathbf{c}^T \hat{\mathbf{x}}^-(k)\} + \hat{\mathbf{x}}^-(k)$
    - 事後誤差共分散行列:  $P(k) = [\mathbf{I} - \mathbf{g}(k)\mathbf{c}^T]P^-(k)$

# 更新処理のブロック図



# 多変数に対するカルマンフィルタ

- 状態空間モデル

- $\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{v}(k)$

- $\boldsymbol{x}(k)$ :  $n$ 次ベクトル,  $\boldsymbol{A}$ :  $n \times n$ 行列,  $\boldsymbol{B}$ :  $n \times r$ 行列,  
 $\boldsymbol{v}(k)$ :  $r$ 次システム雑音ベクトル(正規性白色雑音),  
平均値ベクトル: $\mathbf{0}$ , 共分散行列: $\boldsymbol{Q}$

- $\boldsymbol{y}(k) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{w}(k)$

- $\boldsymbol{y}(k)$ :  $p$ 次ベクトル,  $\boldsymbol{C}$ :  $p \times n$ 行列,  $\boldsymbol{w}(k)$ :  $p$ 次観測雑音  
ベクトル(正規性白色雑音), 平均値ベクトル: $\mathbf{0}$ , 共分散  
行列: $\boldsymbol{R}$
    - $\boldsymbol{v}(k)$ と $\boldsymbol{w}(k)$ は互いに独立

# 多変数に対するカルマンフィルタ

- 更新処理

- 予測ステップ

- 事前状態推定値:  $\hat{\mathbf{x}}^-(k) = A\hat{\mathbf{x}}(k-1)$
    - 事前誤差共分散行列:  $P^-(k) = AP(k-1)A^T + BQB^T$

- フィルタリングステップ

- カルマンゲイン行列:  $G(k) = P^-(k)C[CP^-(k)C + R]^{-1}$ 
      - $G(k)$ は  $n \times p$  行列
    - 状態推定値:  $\hat{\mathbf{x}}(k) = G(k)\{\mathbf{y}(k) - C\hat{\mathbf{x}}^-(k)\} + \hat{\mathbf{x}}^-(k)$
    - 事後誤差共分散行列:  $P(k) = [I - G(k)C]P^-(k)$