

# 応用システム工学

## 第七回 線形カルマンフィルタ

平成27年6月19日

E6-111

# 制御入力を考慮したカルマンフィルタ

- 状態方程式

- $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{b}_u u(k) + \mathbf{b}v(k)$

- $u(k)$ : 制御入力(スカラー),  $\mathbf{b}_u$ :  $n$ 次ベクトル

- 制御入力は確定的な値を持つ入力となるので, 推定誤差共分散行列には影響を与えない

- 出力方程式

- $y(k) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(k) + w(k)$

# 制御入力を考慮したカルマンフィルタ

- 更新処理

- 予測ステップ

- 事前状態推定値:  $\hat{\mathbf{x}}^-(k) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(k-1) + \mathbf{b}_u u(k-1)$
    - 事前誤差共分散行列:  $\mathbf{P}^-(k) = \mathbf{A}\mathbf{P}(k-1)\mathbf{A}^T + \sigma_v^2 \mathbf{b}\mathbf{b}^T$

- フィルタリングステップ

- カルマンゲイン:  $\mathbf{g}(k) = \frac{\mathbf{P}^-(k)\mathbf{c}}{\mathbf{c}^T\mathbf{P}^-(k)\mathbf{c} + \sigma_w^2}$
    - 状態推定値:  $\hat{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{g}(k)\{y(k) - \mathbf{c}^T\hat{\mathbf{x}}^-(k)\} + \hat{\mathbf{x}}^-(k)$
    - 事後誤差共分散行列:  $\mathbf{P}(k) = [\mathbf{I} - \mathbf{g}(k)\mathbf{c}^T]\mathbf{P}^-(k)$

# 時変係数を持つシステムに対する カルマンフィルタ

- 時変形数をもつ状態方程式
  - $\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{A}(k)\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{b}(k)v(k)$
- 時変形数をもつ出力方程式
  - $y(k) = \boldsymbol{c}^T(k)\boldsymbol{x}(k) + w(k)$

# 時変係数を持つシステムに対する カルマンフィルタ

- 更新処理

- 予測ステップ

- 事前状態推定値:  $\hat{\mathbf{x}}^-(k) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(k-1)$
    - 事前誤差共分散行列:  $\mathbf{P}^-(k) = \mathbf{A}(k-1)\mathbf{P}(k-1)\mathbf{A}(k-1)^T + \sigma_v(k-1)^2\mathbf{b}(k-1)\mathbf{b}(k-1)^T$

- フィルタリングステップ

- カルマンゲイン:  $\mathbf{g}(k) = \frac{\mathbf{P}^-(k)\mathbf{c}}{\mathbf{c}^T\mathbf{P}^-(k)\mathbf{c} + \sigma_w(k)^2}$
    - 状態推定値:  $\hat{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{g}(k)\{y(k) - \mathbf{c}^T\hat{\mathbf{x}}^-(k)\} + \hat{\mathbf{x}}^-(k)$
    - 事後誤差共分散行列:  $\mathbf{P}(k) = [\mathbf{I} - \mathbf{g}(k)\mathbf{c}^T]\mathbf{P}^-(k)$
    - システム雑音・観測雑音の分散も時変

# 定常カルマンゲインを求める

- カルマンゲインの収束値
- 事前誤差共分散行列の更新式

$$\begin{aligned} & - P^-(k) = AP(k-1)A^T + \sigma_v^2 \mathbf{b}\mathbf{b}^T \\ & = A\{[I - \mathbf{g}(k-1)\mathbf{c}^T]P^-(k-1)\}A^T + \sigma_v^2 \mathbf{b}\mathbf{b}^T \\ & = A \left\{ \left[ I - \frac{P^-(k-1)\mathbf{c}}{\mathbf{c}^T P^-(k-1)\mathbf{c} + \sigma_w^2} \mathbf{c}^T \right] P^-(k-1) \right\} A^T + \sigma_v^2 \mathbf{b}\mathbf{b}^T \end{aligned}$$

# 定常カルマンゲインを求める

- リカッチ方程式

- $$P^-(k) = A \left\{ P^-(k-1) - \frac{P^-(k-1)cc^T P^-(k-1)}{c^T P^-(k-1)c + \sigma_w^2} \right\} A^T + \sigma_v^2 bb^T$$

- 定常状態では事前誤差共分散行列は一定

- $P = P^-(k) = P^-(k-1)$

- 代数リカッチ方程式: 
$$P = A \left\{ P - \frac{Pcc^T P}{c^T P c + \sigma_w^2} \right\} A^T + \sigma_v^2 bb^T$$

- 正定値解:  $P^*$

- 定常カルマンゲイン: 
$$g(k) = \frac{P^* c}{c^T P^* c + \sigma_w^2}$$

# カルマンフィルタの漸近安定性

- 状態方程式  $\boldsymbol{x}(k + 1) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{b}u(k)$
- 出力方程式  $y(k) = \boldsymbol{c}^T(k)\boldsymbol{x}(k) + du(k)$
- 可観測行列  $\boldsymbol{M} =$   
 $[\boldsymbol{c} \quad \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{c} \quad (\boldsymbol{A}^T)^2 \boldsymbol{c} \quad \dots \quad (\boldsymbol{A}^T)^{n-1} \boldsymbol{c}]$
- 可制御行列  $\boldsymbol{N} =$   
 $[\boldsymbol{b} \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{b} \quad \boldsymbol{A}^2 \boldsymbol{b} \quad \dots \quad \boldsymbol{A}^{n-1} \boldsymbol{b}]$
- 漸近安定の条件
  - $\text{rank}\boldsymbol{M} = n, \text{rank}\boldsymbol{N} = n$

2015/6/19  $k \rightarrow \infty$  で  $\boldsymbol{P}^-(k)$  は  $\boldsymbol{P}^*$  に収束する

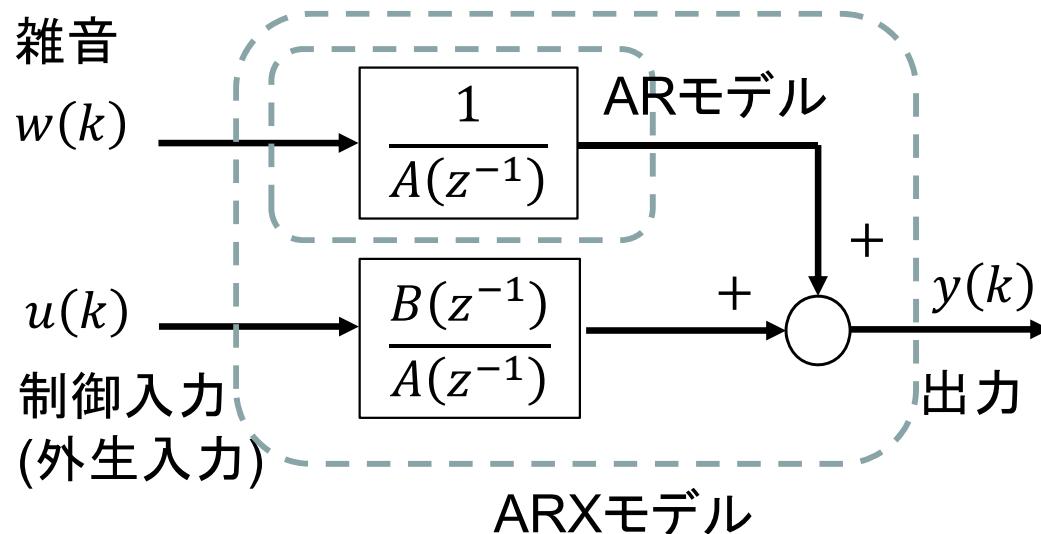


# カルマンフィルタによる パラメータ推定

- システムのモデル

$$-y(k) + a_1y(k-1) + \dots + a_ny(k-n) = b_1u(k-1) + \dots + b_nu(k-n) + w(k)$$

- 未知パラメータ $\{a_1, \dots, a_n\}, \{b_1, \dots, b_n\}$
- 誤差 $w(k)$ , 正規性白色雑音 $N(0, \sigma_w^2)$



$$A(z^{-1}) = 1 + a_1z^{-1} + \dots + a_nz^{-n}$$

$$B(z^{-1}) = 1 + b_1z^{-1} + \dots + b_nz^{-n}$$

$$\text{伝達関数} \quad G(z^{-1}) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}$$

$$\text{雑音モデル} \quad H(z^{-1}) = \frac{1}{A(z^{-1})}$$

# カルマンフィルタによる パラメータ推定

- 線形回帰モデル表現

- $$y(k) = -a_1y(k-1) - \dots - a_ny(k-n) + b_1u(k-1) + \dots + b_nu(k-n) + w(k)$$
$$= \boldsymbol{\varphi}^T(k)\boldsymbol{\theta} + w(k)$$

- 回帰ベクトル  $\boldsymbol{\varphi}(k) = [-y(k-1), \dots, -y(k-n), u(k-1), \dots, u(k-n)]$

- 時刻kまでのデータで構成

- 未知パラメータベクトル  $\boldsymbol{\theta} = [a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n]^T$

- 一定値として仮定

# カルマンフィルタによる 時不変パラメータ推定

- パラメータベクトルを状態変数とした状態方程式と状態空間モデルとして考える
  - $\boldsymbol{\theta}(k+1) = \boldsymbol{\theta}(k) \Leftrightarrow \boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{A}(k)\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{b}(k)v(k)$
  - $y(k) = \boldsymbol{\varphi}^T(k)\boldsymbol{\theta}(k) + w(k) \Leftrightarrow y(k) = \boldsymbol{c}^T(k)\boldsymbol{x}(k) + w(k)$
  - 変数の対応関係
    - $\boldsymbol{A}(k) = \boldsymbol{I}, \boldsymbol{b}(k) = \mathbf{0}, \boldsymbol{c}(k) = \boldsymbol{\varphi}(k)$

# カルマンフィルタによる 時不変パラメータ推定

- パラメータ推定の状態空間モデル
  - $A(k) = I, b(k) = 0$ を利用
  - 事前状態推定値
    - $\hat{\theta}^-(k) = A(k-1)\hat{\theta}(k-1) = \hat{\theta}(k-1)$
  - 事前誤差共分散行列
    - $P^-(k) = A(k-1)P(k-1)A(k-1)^T + \sigma_v(k-1)^2 b(k-1)b(k-1)^T$   
 $= P(k-1)$

# カルマンフィルタによる 時不変パラメータ推定

- 初期値

- パラメータ推定値  $\hat{\theta}(0) = \theta_0$

- $\theta_0 = 0$ としてよい

- 共分散行列  $P(0) = \gamma I$

- 雑音が大きい場合は  $\gamma$  を小さくする

# カルマンフィルタによる 時不変パラメータ推定


- 更新式

- カルマンゲイン  $\mathbf{g}(k) = \frac{\mathbf{P}(k-1)\boldsymbol{\varphi}(k)}{\boldsymbol{\varphi}^T(k)\mathbf{P}(k-1)\boldsymbol{\varphi}(k) + \sigma_w^2}$

- パラメータ推定値  $\hat{\boldsymbol{\theta}}(k) = \hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1) + \mathbf{g}(k)\{y(k) - \boldsymbol{\varphi}^T(k)\hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1)\}$

- 事後誤差共分散行列:  $\mathbf{P}(k) = [\mathbf{I} - \mathbf{g}(k)\boldsymbol{\varphi}^T(k)]\mathbf{P}(k-1)$   
 $= \mathbf{P}(k-1) - \frac{\mathbf{P}(k-1)\boldsymbol{\varphi}(k)\boldsymbol{\varphi}^T(k)\mathbf{P}(k-1)}{\boldsymbol{\varphi}^T(k)\mathbf{P}(k-1)\boldsymbol{\varphi}(k) + \sigma_w^2}$

# カルマンフィルタによる 不変パラメータ推定

- 未知パラメータ  $\boldsymbol{\theta}(k+1) = \boldsymbol{\theta}(k) + \mathbf{b}(k)v(k)$
- ウィナーモデル:  $v(k)$ は正規性白色雑音  $N(0, \sigma_v^2)$
- 事前誤差共分散行列  $\mathbf{P}^-(k) = \mathbf{P}(k-1) + \sigma_v^2 \mathbf{b}\mathbf{b}^T$
- カルマンゲイン  $\mathbf{g}(k) = \frac{\mathbf{P}^-(k)\boldsymbol{\varphi}(k)}{\boldsymbol{\varphi}^T(k)\mathbf{P}^-(k)\boldsymbol{\varphi}(k) + \sigma_w^2}$   0に収束しない
- パラメータ推定値  $\hat{\boldsymbol{\theta}}(k) = \hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1) + \mathbf{g}(k)\{y(k) - \boldsymbol{\varphi}^T(k)\hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1)\}$
- 事後誤差共分散行列  $\mathbf{P}(k) = [\mathbf{I} - \mathbf{g}(k)\boldsymbol{\varphi}^T(k)]\mathbf{P}^-(k)$

# システムの性質

- 線形システム
  - 確率変数の正規性が保存される
- 非線形システム
  - 確率変数の正規性が保存されない
  - 非線形状態方程式
    - $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k)) + \mathbf{b}v(k)$  or  $\mathbf{f}(\mathbf{x}(k), v(k))$
    - $y(k) = h(\mathbf{x}(k)) + w(k)$  or  $h(\mathbf{x}(k), w(k))$ 
      - $f$ 非線形関数ベクトル,  $h$ 非線形関数
      - システム雑音 $v(k)$ , 平均値0, 分散 $\sigma_v^2$
      - 観測雑音 $w(k)$ , 平均値0, 分散 $\sigma_w^2$



# 非線形カルマンフィルタ

- 拡張カルマンフィルタ(EKF)
  - 非線形関数を線形化する
- UKF
  - 統計的サンプリング理論にもとづいて, 平均値 $\hat{x}$ と共分散行列 $P$ の非線形変換を近似
- パーティクルフィルタ
  - 確率的サンプリングアプローチ(モンテカルロ法)

# 拡張カルマンフィルタ(EKF)

- 非線形関数  $f(\mathbf{x}(k))$ ,  $h(\mathbf{x}(k))$  のテイラー展開
  - 仮定: 時刻  $k$ ,  $k + 1$  において, 事前推定値  $\hat{\mathbf{x}}^-(k)$  と事後推定値  $\hat{\mathbf{x}}(k)$  が得られている
  - 一次近似
    - $f(\mathbf{x}(k)) = f(\hat{\mathbf{x}}(k)) + A(k)\{\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k)\}$
    - $h(\mathbf{x}(k)) = h(\hat{\mathbf{x}}^-(k)) + \mathbf{c}^T(k)\{\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}^-(k)\}$ 
      - $A(k) = \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x=\hat{\mathbf{x}}(k)}$ ,  $\mathbf{c}^T(k) = \left. \frac{\partial h(x)}{\partial x} \right|_{x=\hat{\mathbf{x}}^-(k)}$

# 拡張カルマンフィルタ(EKF)

- 状態方程式の線形近似

- $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k)) + \mathbf{b}v(k)$

- $\cong \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}(k)) + \mathbf{A}(k)\{\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k)\} + \mathbf{b}v(k)$

- $= \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{b}v(k) + \mathbf{u}(k)$

- $\mathbf{u}(k) = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}(k)) - \mathbf{A}(k)\hat{\mathbf{x}}(k)$

- $y(k) = h(\mathbf{x}(k)) + w(k)$

- $\cong h(\hat{\mathbf{x}}^-(k)) + \mathbf{c}^T(k)\{\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}^-(k)\} + w(k)$

- $z(k) = y(k) - h(\hat{\mathbf{x}}^-(k)) + \mathbf{c}^T(k)\hat{\mathbf{x}}^-(k)$ とすると

- $z(k) = \mathbf{c}^T(k)\mathbf{x}(k) + w(k)$ となる

# 拡張カルマンフィルタ(EKF)

- 更新処理

- 予測ステップ

- 事前状態推定値:  $\hat{\mathbf{x}}^-(k) = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}(k-1))$
    - 事前誤差共分散行列:  $\mathbf{P}^-(k) = \mathbf{A}(k-1)\mathbf{P}(k-1)\mathbf{A}(k-1)^T + \sigma_v(k-1)^2 \mathbf{b}\mathbf{b}^T$

- フィルタリングステップ

- カルマンゲイン:  $\mathbf{g}(k) = \frac{\mathbf{P}^-(k)\mathbf{c}(k)}{\mathbf{c}(k)^T\mathbf{P}^-(k)\mathbf{c}(k) + \sigma_w^2}$
    - 状態推定値:  $\hat{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{g}(k)\{y(k) - h(\hat{\mathbf{x}}^-(k))\} + \hat{\mathbf{x}}^-(k)$
    - 事後誤差共分散行列:  $\mathbf{P}(k) = [\mathbf{I} - \mathbf{g}(k)\mathbf{c}(k)^T]\mathbf{P}^-(k)$