制御工学I　第10回
安定性
ラウス，フルビッツの安定判別

平成28年6月20日

授業の予定

- 制御工学概論（１回）
  - 制御技術は現在様々な工学分野において重要な基本技術となっている。工学における制御工学の位置づけと歴史について説明する。さらに、制御システムの基本構成と種類を紹介する。
- ラプラス変換（１回）
  - 制御工学、特に古典制御ではラプラス変換が重要な役割を果たしている。ラプラス変換と逆ラプラス変換の定義を紹介し、微分方程式のラプラス変換について解説する。
- 制御システムのモデリングと伝達関数（３回）
  - システムの相似性について概説し、システムの入出力特性を表す手法である伝達関数について詳述する。システムの図的表現であるブロック線図とその等価変換について解説する。
- 過渡特性（３回）
  - システムの過渡状態を評価する方法であるインパルス応答とインディシャル応答について解説する。システムの速応性や安定性の指標である整定時間、立ち上がり量、行き過ぎ量について述べる。
- 安定性（２回）
  - システムの安定性の概念を述べ、安定性を判定する代数的方法であるラウス-フルビッツの方法について説明する。
- 周波数特性（４回）
  - 周波数領域におけるシステムの特性を周波数特性という。周波数特性と伝達関数との関係を説明し、ベクトル軌跡とボード線図の作成方法を説明する。

制御システムの安定性判別方法

- 特性方程式の特性根を求めて調べる
  - 特性方程式を解く
  - 根軌跡による方法
- 特性方程式の係数を用いて調べる
  - ラウス-フルビッツの方法
- ベクトル軌跡による方法
  - ナイキストの方法
- ボード線図を用いた方法
  - ゲイン余裕，位相余裕

閉ループ伝達関数

- 線形な閉ループシステムの伝達関数
- $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_0+b_1 s+\cdots+b_{m-1}s^{m-1}+b_m s^m}{a_0+a_1 s+\cdots+a_{n-1}s^{n-1}+a_n s^n} = \frac{N(s)}{D(s)}$
  - 分母多項式（特性多項式）
    $D(s) = a_0 + a_1 s + \cdots + a_{n-1}s^{n-1} + a_n s^n$
  - 分子多項式
    $N(s) = b_0 + b_1 s + \cdots + b_{m-1}s^{m-1} + b_m s^m$
  - $m \leq n$

特性方程式の係数を用いた安定判別法

- 伝達関数の特性方程式の根の実部
  - 高次の方程式の求解(因数分解)は困難
  - 根の実部の正負判別で十分
  - 方程式を解かない(因数分解しない)で安定判別
- 特性方程式の解(因数分解)

$$
\begin{aligned}
0 &= a_0 + a_1 s + \cdots + a_{n-1} s^{n-1} + a_n s^n \\
&= \prod_{j=1}^{n-2\mu} \left(s + p_j\right) \prod_{i=1}^{\mu} \left\{\left(s + \sigma_i\right)^2 + \omega_i{}^2\right\} \qquad \mu \le \frac{n}{2}
\end{aligned}
$$

  - p_j:実数根, σ_i:複素根実部,ω_i:複素根虚部

特性方程式の係数を用いた安定判別法

- 全ての根の実部が負

$$p_j > 0\left(j = 1\cdots n-2\mu\right), \sigma_i > 0\left(i = 1\cdots \mu\right)$$

$$0 = \prod_{j=1}^{n-2\mu}\left(s + p_j\right)\prod_{i=1}^{\mu}\left\{\left(s+\sigma_i\right)^2 + \omega_i^{\ 2}\right\}$$

$$= \prod_{j=1}^{n-2\mu}\left(s + p_j\right)\prod_{i=1}^{\mu}\left\{s^2 + 2s\sigma_i + \sigma_i^{\ 2} + \omega_i^{\ 2}\right\}$$

- s^kの係数は全て正 $\Leftarrow$ $p_j > 0, 2\sigma_i > 0, \sigma_i^{\ 2} + \omega_i^{\ 2} > 0$
  - 全ての根の実部が負となる必要条件

$$a_k > 0\left(k = 0\cdots n-1\right)$$

十分条件は？

ラウスの安定判別法

- 特性多項式の係数からラウス表を作成
  - $a_0 + a_1 s + \cdots + a_{n-1} s^{n-1} + a_n s^n$
  - 係数を変換

$$
2行目\begin{cases} \alpha_0{}^0 = a_n \\ \alpha_1{}^0 = a_{n-2} \\ \alpha_2{}^0 = a_{n-4} \\ \quad\vdots \end{cases}
\qquad
1行目\begin{cases} \alpha_0{}^1 = a_{n-1} \\ \alpha_1{}^1 = a_{n-3} \\ \alpha_2{}^1 = a_{n-5} \\ \quad\vdots \end{cases}
$$

  - 変換した係数の変換

$$
\alpha_i{}^{k+2} = \frac{\alpha_0{}^{k+1}\alpha_{i+1}{}^{k} - \alpha_0{}^{k}\alpha_{i+1}{}^{k+1}}{\alpha_0{}^{k+1}} = \alpha_{i+1}{}^{k} - \gamma_{k+1}\alpha_{i+1}{}^{k+1} \quad ただし \quad \gamma_{k+1} = \frac{\alpha_0{}^{k}}{\alpha_0{}^{k+1}}
$$

2つ左の
1番上

2つ左の
1つ下

1つ左の
1つ下

1つ左の
1番上

ラウスの安定判別法

- ラウス表

$$
\begin{array}{c|cccccc}
s^n & \alpha_0^{\;0} & \alpha_1^{\;0} & \alpha_2^{\;0} & \cdots & \alpha_{m-2}^{\;0} & \alpha_{m-1}^{\;0} & \alpha_m^{\;0} \\
s^{n-1} & \alpha_0^{\;1} & \alpha_1^{\;1} & \alpha_2^{\;1} & \cdots & \alpha_{m-2}^{\;1} & \alpha_{m-1}^{\;1} & \\
s^{n-2} & \alpha_0^{\;2} & \alpha_1^{\;2} & \alpha_2^{\;2} & \cdots & \alpha_{m-2}^{\;2} & \alpha_{m-1}^{\;2} & \\
s^{n-3} & \alpha_0^{\;3} & \alpha_1^{\;3} & \alpha_2^{\;3} & \cdots & \alpha_{m-2}^{\;3} & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & & & \\
s^2 & \alpha_0^{\;n-2} & \alpha_1^{\;n-2} & & & & & \\
s^1 & \alpha_0^{\;n-1} & & & & & & \\
s^0 & \alpha_0^{\;n} & & & & & &
\end{array}
$$

符号の反転した数が，正の実部を持つ根の数

- 安定判別法(根の実部が全て負となる必要十分条件)

$$\alpha_0^{\;i} > 0(i = 0,1,\cdots,n) \quad \text{または} \quad \gamma_k > 0(k = 1,2,\cdots,n)$$

ラウスの安定判別法

- 例題1　$a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0$　が安定となる条件

$$
\begin{array}{c|cc}
s^3 & a_3 & a_1 \\
s^2 & a_2 & a_0 \\
s^1 & \dfrac{a_2 a_1 - a_3 a_0}{a_2} = a_1 - \dfrac{a_3}{a_2} a_0 & \\
s^0 & a_0 - \dfrac{a_2}{a_1 - \dfrac{a_3}{a_2} a_0} 0 = a_0 &
\end{array}
$$

a_3, a_2, a_1, a_0　が同符号

$a_2 a_1 - a_3 a_0 > 0$

ラウスの安定判別法

- 例題2 $s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 4s + 5 = 0$

$$
\begin{array}{c|ccc}
s^4 & 1 & 3 & 5 \\
s^3 & 2 & 4 & \\
s^2 & \dfrac{2\cdot 3 - 1\cdot 4}{2} = 1 & \dfrac{2\cdot 5 - 1\cdot 0}{2} = 5 & \\
s^1 & \dfrac{1\cdot 4 - 2\cdot 5}{1} = -6 & & \\
s^0 & \dfrac{-6\cdot 5 - 1\cdot 0}{-6} = 5 & &
\end{array}
$$

符号が2回反転
→実部が正の根が二つある

ラウスの安定判別法

- 例題3(特殊) $s^3+2s^2+s+2=(s+j)(s-j)(s+2)=0$

$$
\begin{array}{c|cc}
s^3 & 1 & 1 \\
s^2 & 2 & 2 \\
s^1 & \dfrac{2\cdot 1-1\cdot 2}{2}=0\approx\varepsilon & \\
s^0 & \dfrac{\varepsilon\cdot 2-2\cdot 0}{\varepsilon}=2 &
\end{array}
$$

0がある
→虚根の対がある

ラウスの安定判別法

- 例題4(特殊)　$s^3-3s+2=(s-1)^2(s+2)=0$

$$
\begin{array}{c|cc}
s^3 & 1 & -3 \\
s^2 & 0\approx\varepsilon & 2 \\
s^1 & \dfrac{\varepsilon\cdot(-3)-1\cdot 2}{\varepsilon}=-3-\dfrac{2}{\varepsilon} & \\
s^0 & \dfrac{\left(-3-\dfrac{2}{\varepsilon}\right)\cdot 2-\varepsilon\cdot 0}{-3-\dfrac{2}{\varepsilon}}=2 &
\end{array}
$$

負

符号が2回反転
→実部が正の根が二つある

フルビッツの安定判別法

$$a_0 + a_1 s + \cdots + a_{n-1} s^{n-1} + a_n s^n = 0$$

- 特性多項式の係数からフルビッツ行列を作成
  - nxn行列
  - 要素a_{n-1}よりはじめる
    - 一つ右に移る毎に係数を2減らす
    - 一つ下に移る毎に係数を1増やす
    - $a_n=1$
    - $a_k=0$ k>n or k<0

$$H = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & a_n & a_{n-2} & \cdots & a_0 & 0 & 0 \\ & 0 & a_{n-1} & & a_1 & 0 & 0 \\ & & a_n & & a_2 & a_0 & 0 \\ & & & & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_4 & a_2 & a_0 \end{bmatrix}$$

フルビッツの安定判別法

- フルビッツ行列式の作成
  - 左上kxk小行列の行列式Δ_k(k=1,2,・・・,n-1)（主座小行列式）

$$\Delta_1 = a_{n-1} \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix} \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix} \cdots \Delta_{n-1} = \det \mathrm{H}_{\mathrm{n\text{-}1}}$$

- 安定判別法
  - 特性方程式の根の実部が全て負となる条件(k=1,2,・・・,n-1)

$$\Delta_k > 0$$

ラウス法とフルビッツ法は等価

フルビッツの安定判別法

- 例題

$$a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3 + a_4 s^4 = 0$$

$$H = \begin{bmatrix} a_3 & a_1 & 0 & 0 \\ a_4 & a_2 & a_0 & 0 \\ 0 & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_4 & a_2 & a_0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_1 = a_3 > 0$$

$a_i>0$なので満足

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ a_4 & a_2 \end{vmatrix} = a_3 a_2 - a_4 a_1 > 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 & 0 \\ a_4 & a_2 & a_0 \\ 0 & a_3 & a_1 \end{vmatrix} = a_3 a_2 a_1 - a_4 a_1{}^2 - a_0 a_3{}^2 = \underline{a_1 (a_3 a_2 - a_4 a_1) - a_0 a_3{}^2 > 0}$$

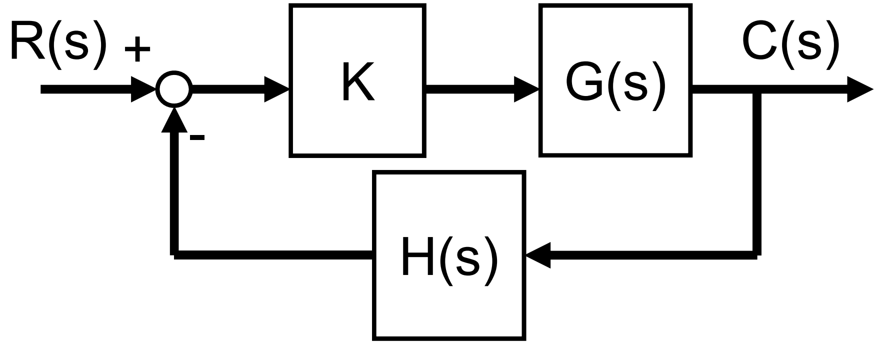
$\Delta_3>0$を満足すれば$\Delta_2>0$も満足

根軌跡法

- システムの過渡応答は極の位置(値)に関係する
- 制御ゲインにより極の場所(値)が変わる
  - どのように変化するのか注目
- 設計
  - 適切なゲインの設定により，極を所望の場所に配置
    - 移動できないときは補償器を使用
  - システムの極や零の追加の影響の定性的な評価

伝達関数の極と根

- ゲインKを持つフィードバック制御システム
  - 閉ループ伝達関数



- $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{KG(s)}{1+KG(s)H(s)}$
- 各要素をsの多項式で表す
  - $G(s) = \frac{b(s)}{a(s)}, H(s) = \frac{d(s)}{c(s)}$
  - $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K\frac{b(s)}{a(s)}}{1+K\frac{b(s)d(s)}{a(s)c(s)}} = K\frac{b(s)}{a(s)}\frac{a(s)c(s)}{a(s)c(s)+Kb(s)d(s)} =$ $K\frac{b(s)c(s)}{a(s)c(s)+Kb(s)d(s)}$
  - $a(s)c(s) + Kb(s)d(s) = 0$→根は伝達関数の極
  - $b(s)c(s) = 0$ →根は伝達関数の零点
  - $K: 0 \rightarrow \infty$で伝達関数の極(特性方程式の根)は変化

根軌跡
根のs平面上の変化

詳しくは制御工学IIで