

制御工学I 第6回

過渡特性1

平成28年5月23日

授業の予定

- 制御工学概論(1回)
 - 制御技術は現在様々な工学分野において重要な基本技術となっている。工学における制御工学の位置づけと歴史について説明する。さらに、制御システムの基本構成と種類を紹介する。
- ラプラス変換(1回)
 - 制御工学、特に古典制御ではラプラス変換が重要な役割を果たしている。ラプラス変換と逆ラプラス変換の定義を紹介し、微分方程式のラプラス変換について解説する。
- 制御システムのモデリングと伝達関数(3回)
 - システムの相似性について概説し、システムの入出力特性を表す手法である伝達関数について詳述する。システムの図的表現であるブロック線図とその等価変換について解説する。
- 過渡特性(3回)
 - システムの過渡状態を評価する方法であるインパルス応答とインディシャル応答について解説する。システムの速応性や安定性の指標である整定時間、立ち上がり量、行き過ぎ量について述べる。
- 安定性(2回)
 - システムの安定性の概念を述べ、安定性を判定する代数的方法であるラウス-フルビッツの方法について説明する。
- 周波数特性(4回)
 - 周波数領域におけるシステムの特性を周波数特性という。周波数特性と伝達関数との関係を説明し、ベクトル軌跡とボード線図の作成方法を説明する。

制御システムの安定性

- 制御システムの特長評価として重要
- 線形時不変システムにおいて
 - 安定 → 初期状態から平衡状態に移る
 - 安定限界 → 振動状態が継続する
 - 不安定 → 状態が発散する。(実際のシステムではどこかでそれ以上大きくなならないようになり、壊れたり、非線形性が現れる。)

過渡と定常状態

- 線形時不変システムの時間応答

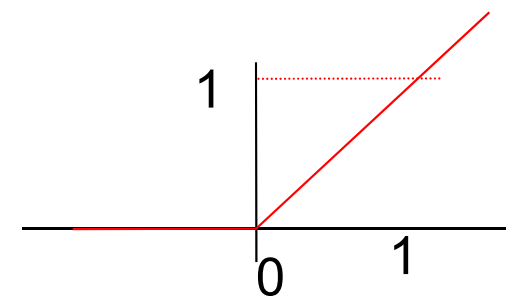
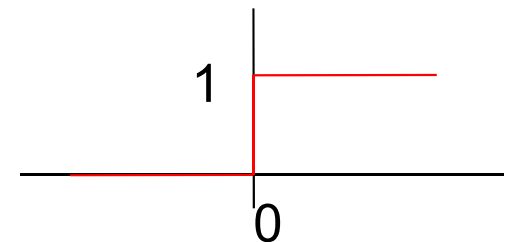
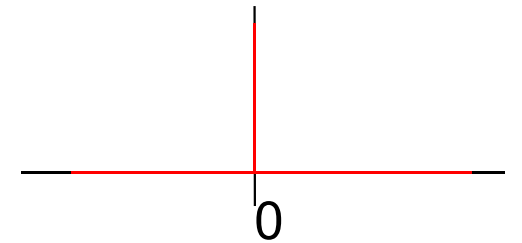
$$C(t) = C_{tr}(t) + C_{ss}(t)$$

- 過渡応答 $C_{tr}(t)$
 - 初期状態から最終状態への遷移
- 定常状態 $C_{ss}(t)$
 - 時間 t が ∞ となった時の値
- システムの応答は過渡応答と定常状態の和
 - 定常誤差が一つの評価基準

初期状態の影響

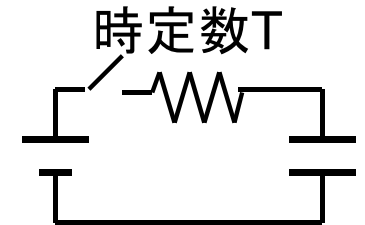
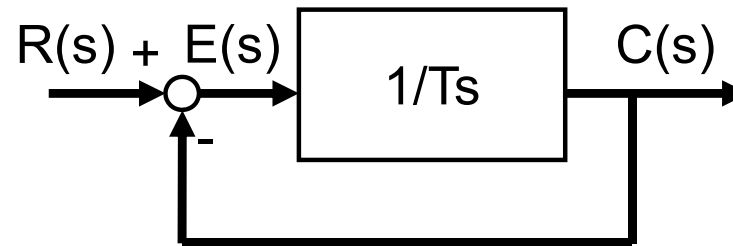
入力に対する出力の応答

- インパルス入力
 - 単位インパルス $R(s) = 1$
- ステップ入力(インディシャル入力)
 - 単位ステップ $R(s) = \frac{1}{s}$
- ランプ入力
 - 単位ランプ $R(s) = \frac{1}{s^2}$

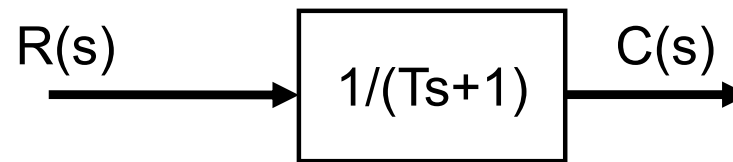


一次のシステムの応答

- 一次のシステム
 - 具体的例
 - RC回路
 - 熱回路
 - 伝達関数



まとめると



$$\begin{cases} C(s) = \frac{1}{T_s} E(s) \\ E(s) = R(s) - C(s) \end{cases}$$

$$C(s) = \frac{1}{T_s} [R(s) - C(s)]$$

$$C(s) \left[1 + \frac{1}{T_s} \right] = \frac{1}{T_s} R(s) \quad \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{T_s + 1}$$

一次のシステムの応答 インパルス入力

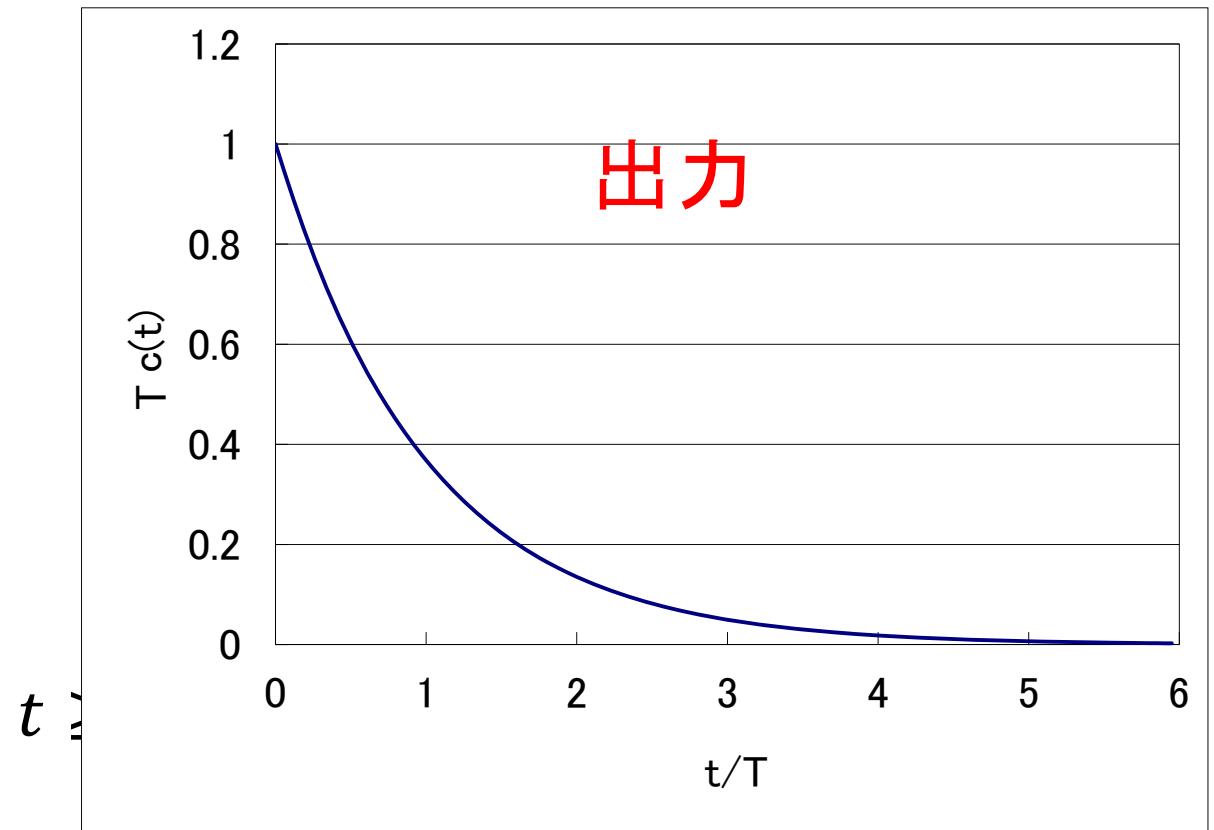
- 単位インパルス入力 $R(s) = 1$

- 出力

- $C(s) = \frac{1}{Ts+1}$

- ラプラス逆変換

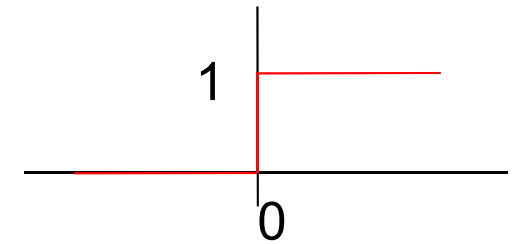
- $c(t) = \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}}$



一次のシステムの応答

単位ステップ入力1

- 単位ステップ入力 $R(s) = \frac{1}{s}$



- 出力 $C(s) = \frac{1}{Ts+1} \frac{1}{s}$

- 部分分数展開 $C(s) = \frac{1}{s} - \frac{T}{Ts+1} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{T}}$

- ラプラス逆変換 $c(t) = 1 - e^{-\frac{t}{T}}, t \geq 0$

- 時定数T

$$c(T) = 1 - e^{-1} = 0.632$$

一次のシステムの応答 単位ステップ入力2

- $t=0$ の接線の傾き

$$\left. \frac{dc(t)}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}} \right|_{t=0} = \frac{1}{T}$$

- 各時点での値

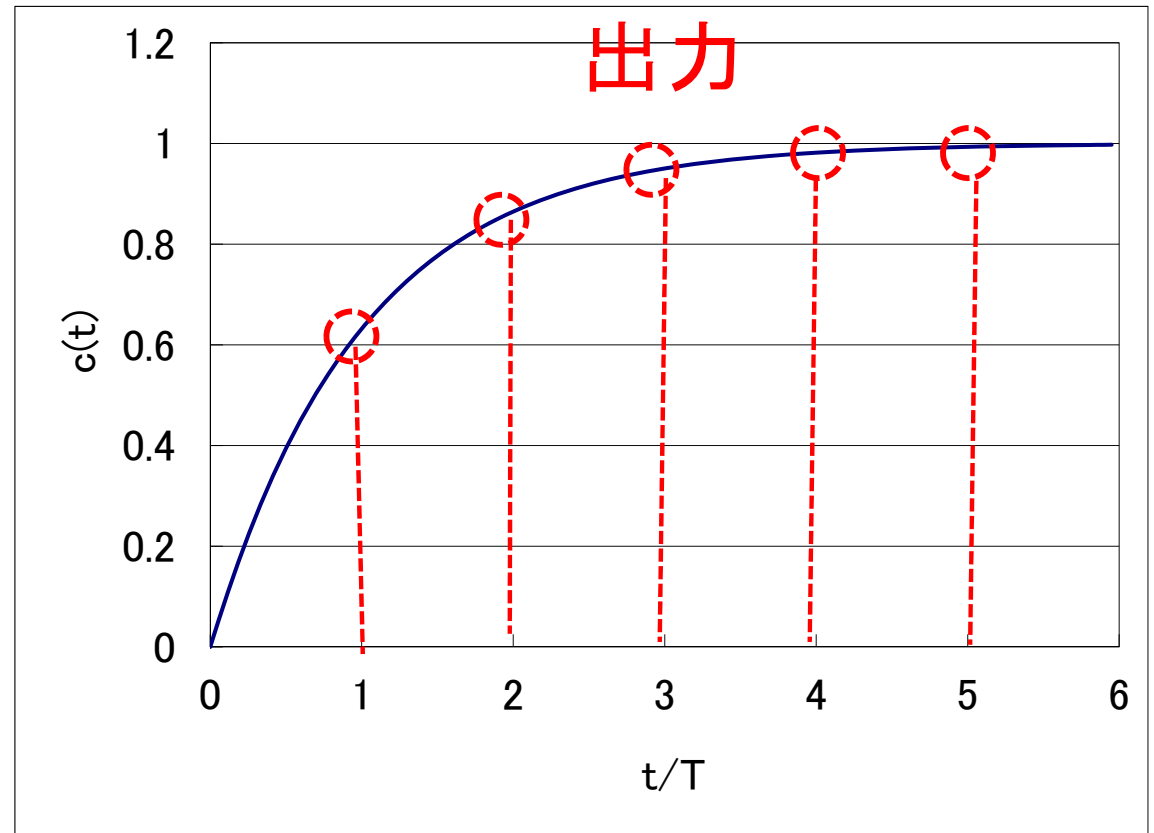
$$C(T) = 1 - e^{-1} = 0.632$$

$$C(2T) = 0.865$$

$$C(3T) = 0.95$$

$$C(4T) = 0.982$$

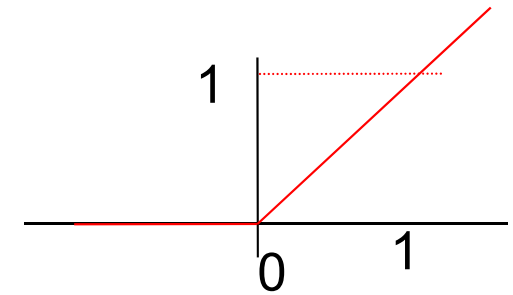
$$C(5T) = 0.993$$



$t > 4T$ では最終値に2%未満の誤差に近づく

一次のシステムの応答 ランプ波入力1

- 単位ランプ波入力 $R(s) = \frac{1}{s^2}$
 $L[t^n] = n!s^{-(n+1)}$ $r(t) = t$ $L[t] = s^{-2}$



- 出力 $C(s) = \frac{1}{Ts+1} \frac{1}{s^2}$

- 部分分数展開 $C(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{T}{s} + \frac{T^2}{Ts+1} = \frac{1}{s^2} - \frac{T}{s} + \frac{T}{s + \frac{1}{T}}$

- ラプラス逆変換 $c(t) = t - T + Te^{-\frac{t}{T}}, t \geq 0$

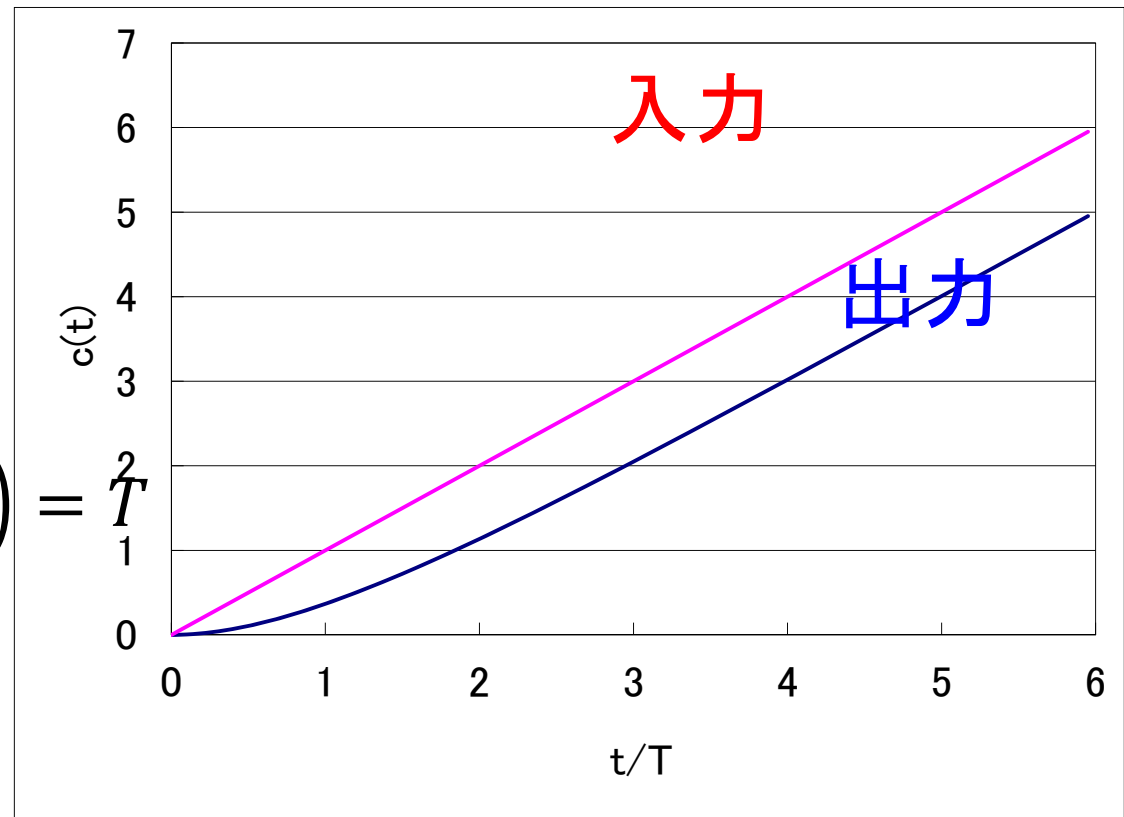
一次のシステムの応答 ランプ波入力2

- 誤差 $e(t) = r(t) - c(t)$
$$= t - \left\{ t - T + T e^{-\frac{t}{T}} \right\} = T \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right)$$

- $e^{-\frac{t}{T}}$ は $t \rightarrow \infty$ で
 $e^{-\frac{t}{T}} = 0$
となる

- $e(\infty) = T \left(1 - e^{-\frac{\infty}{T}} \right) = T$

- 時定数が
短いほど誤差小



一次システムの応答

$$\frac{1}{1+sT}$$

- 単位ランプ波入力 $R(s) = \frac{1}{s^2}$
$$c_r(t) = t - T + Te^{-\frac{t}{T}}, t \geq 0$$
- 単位ステップ入力 $R(s) = \frac{1}{s}$
$$\frac{dc_r}{dt} = c_s(t) = 1 - e^{-\frac{t}{T}}, t \geq 0$$
 - 単位ランプ波入力の微分に相当
- 単位インパルス波入力 $R(s) = 1$
$$\frac{dc_s}{dt} = c_i(t) = \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}}, t \geq 0$$
 - 単位ステップ入力の微分に相当

最終値の定理 復習

- 制御システムの過渡応答の最終値を求める
 - ラプラス変換のまま最終値を求める

- 導関数のラプラス変換 $\int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt = sF(s) - f(0)$

- 極限 $s \rightarrow 0$ を考える

- $$\lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt = \lim_{s \rightarrow 0} \{sF(s) - f(0)\}$$

- 左辺 $\lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} dt = \int_{f(0)}^{f(\infty)} df(t) = f(\infty) - f(0)$

- 右辺 $\lim_{s \rightarrow 0} \{sF(s) - f(0)\} = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) - f(0)$

- $f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$ となる

最終値の定理の利用

- 一次のシステムのステップ応答の最終値

- $C(s) = \frac{1}{1+sT} \frac{1}{s} \Leftrightarrow c(t) = 1 - e^{-\frac{t}{T}}$

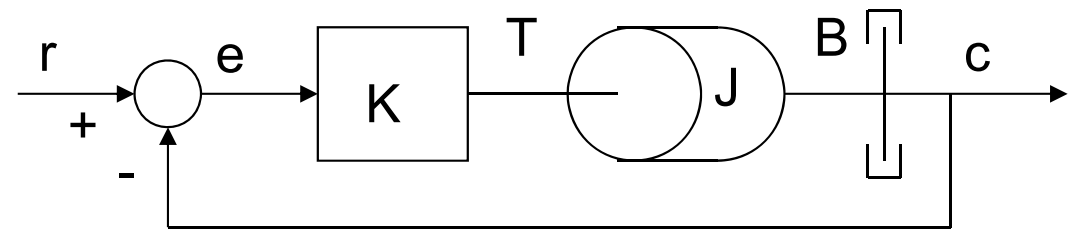
- $\lim_{s \rightarrow 0} sC(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1+sT} \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1+sT} = 1$

- $\lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right) = 1$

- 一致する

二次のシステムの応答

- サーボシステム
 - 比例制御系
 - 入力位置 r
 - 制御出力位置 c
 - ゲイン K
 - 負荷
 - 慣性 J
 - 粘性抵抗 B
 - トルク T
 - 運動方程式: $J\ddot{c} + B\dot{c} = T$



ラプラス変換

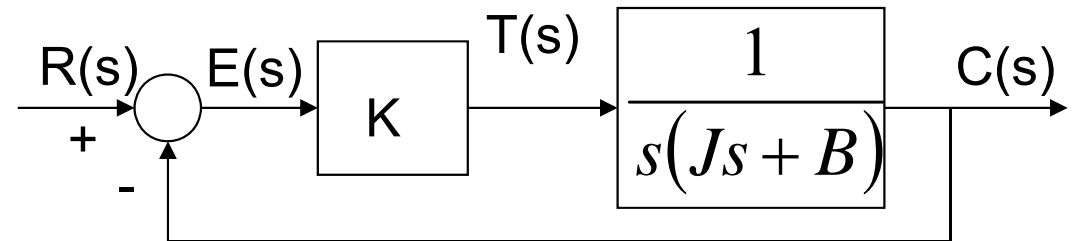
$$Js^2C(s) + BsC(s) = T(s)$$

二次のシステムの応答

- 負荷の伝達関数

$$\frac{C(s)}{T(s)} = \frac{1}{s(Js + B)}$$

ブロック線図



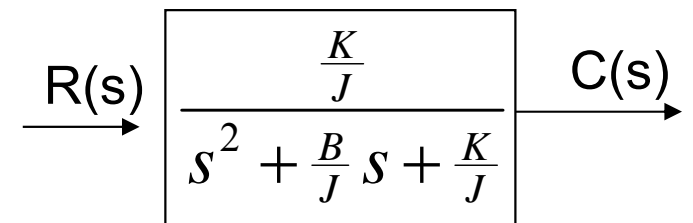
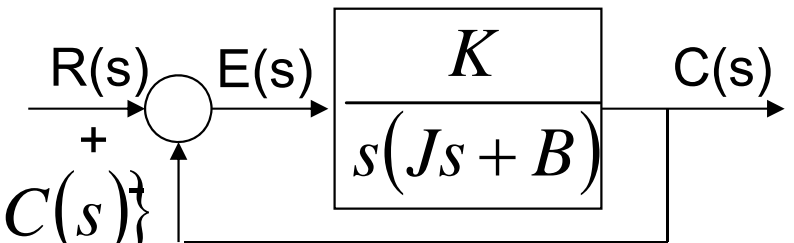
- 閉ループ伝達関数

$$T(s) = K \{R(s) - C(s)\}$$

$$Js^2 C(s) + BsC(s) = T(s) = K \{R(s) - C(s)\}$$

$$Js^2 C(s) + BsC(s) + KC(s) = KR(s)$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{Js^2 + Bs + K} = \frac{K/J}{s^2 + \frac{B}{J}s + \frac{K}{J}}$$



二次のシステムの応答

- 閉ループ伝達関数

$$\begin{aligned}\frac{C(s)}{R(s)} &= \frac{K}{Js^2 + Bs + K} = \frac{K/J}{s^2 + B/Js + K/J} \\ &= \frac{K/J}{\left[s + \frac{B}{2J} + \sqrt{\left(\frac{B}{2J}\right)^2 - \frac{K}{J}} \right] \left[s + \frac{B}{2J} - \sqrt{\left(\frac{B}{2J}\right)^2 - \frac{K}{J}} \right]}\end{aligned}$$

- 共役複素極 $B^2 - 4JK < 0$

- 実極 $B^2 - 4JK \geq 0$

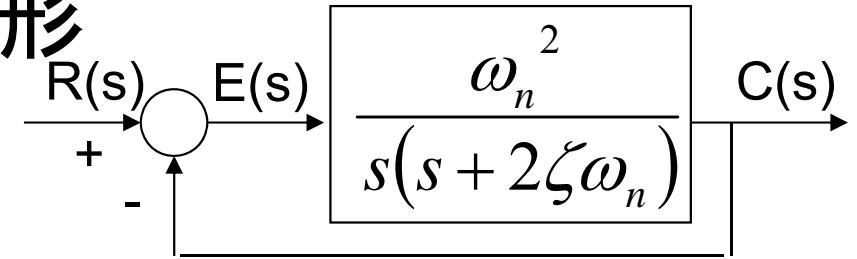
二次のシステムの応答

- 閉ループ伝達関数の標準形

- 固有角周波数: ω_n

- 減衰係数(減衰比): ζ

- サーボシステムとの対応



$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{Js^2 + Bs + K} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$\frac{K}{J} = \omega_n^2$$

$$= \frac{\omega_n^2}{\left(s + \omega_n \left[\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}\right]\right) \left(s + \omega_n \left[\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}\right]\right)}$$

$$\frac{B}{J} = 2\zeta\omega_n$$

二次のシステムの応答

- 二次のシステムの動特性
 - 伝達関数の特性方程式に関する判別式 $\zeta^2 - 1$
 - パラメータ ζ に支配される
 - 弱制動: $0 < \zeta < 1 \rightarrow$ 振動的
 - 極が複素根となる
 - 過渡応答の振動が永続(持続振動): $\zeta = 0$
 - 臨界制動: $\zeta = 1$
 - 過制動: $\zeta > 1$

二次のシステムの応答 弱制動

- 弱制動: $0 < \zeta < 1 \rightarrow$ 振動的

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{(s + \zeta\omega_n + j\omega_d)(s + \zeta\omega_n - j\omega_d)}$$

- 複素根ではラプラス逆変換できない
- 固有角周波数 ω_d (減衰があるとき)

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

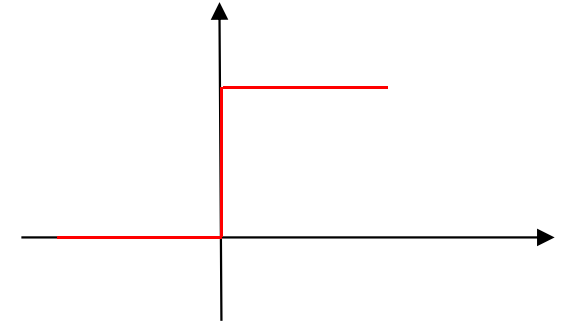
$$\omega_n^2 = (\zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2$$

二次のシステムの応答

弱制動ステップ応答

- 単位ステップ入力に対する応答

$$\begin{aligned} C(s) &= \frac{\omega_n^2}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} \frac{1}{s} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{s + 2\zeta\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{s + \zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} - \frac{\zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{s + \zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} - \frac{\zeta\omega_n}{\omega_d} \frac{\omega_d}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} \end{aligned}$$



二次のシステムの応答

弱制動ステップ応答

- 部分分数展開

$$C(s) = \frac{1}{s} - \frac{s + \zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} - \frac{\zeta\omega_n}{\sqrt{1 - \zeta^2}\omega_n} \frac{\omega_d}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2}$$
$$= \frac{1}{s} - \frac{s + \zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} - \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \frac{\omega_d}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2}$$

- ラプラス逆変換

$$L^{-1} \left[\frac{s + \zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} \right] = e^{-\zeta\omega_n t} \cos \omega_d t$$
$$L^{-1} \left[\frac{\zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} \right] = e^{-\zeta\omega_n t} \sin \omega_d t$$

二次のシステムの応答

弱制動ステップ応答

$$L^{-1}[C(s)] = c(t) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t} \left(\cos \omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \omega_d t \right)$$

$$= 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \left(\sqrt{1-\zeta^2} \cos \omega_d t + \zeta \sin \omega_d t \right)$$

$$= 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \left(\omega_d t + \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \right)$$

$$= 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t + \theta) \quad \text{減衰比}\zeta\text{で応答が変化}$$

$$\sin \theta = \sqrt{1-\zeta^2}, \cos \theta = \zeta$$

二次のシステムの応答

弱制動ステップ応答

- 入出力の誤差

$$e(t) = r(t) - c(t) \quad t \geq 0$$

$$= 1 - \left\{ 1 - e^{-\zeta\omega_n t} \left(\cos \omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \omega_d t \right) \right\}$$

$$= e^{-\zeta\omega_n t} \left(\cos \omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \omega_d t \right)$$

減衰正弦波。 $\zeta > 0$ なら $t \rightarrow \infty$ で、 $e^{-\zeta\omega_n t} = 0$ となり、誤差は無くなる $e(\infty) = 0$ 。