制御工学I　第11回
安定性
周波数特性
正弦波入力に対する応答

平成29年7月3日

授業の予定

- 制御工学概論（１回）
  - 制御技術は現在様々な工学分野において重要な基本技術となっている。工学における制御工学の位置づけと歴史について説明する。さらに、制御システムの基本構成と種類を紹介する。
- ラプラス変換（１回）
  - 制御工学、特に古典制御ではラプラス変換が重要な役割を果たしている。ラプラス変換と逆ラプラス変換の定義を紹介し、微分方程式のラプラス変換について解説する。
- 制御システムのモデリングと伝達関数（３回）
  - システムの相似性について概説し、システムの入出力特性を表す手法である伝達関数について詳述する。システムの図的表現であるブロック線図とその等価変換について解説する。
- 過渡特性（３回）
  - システムの過渡状態を評価する方法であるインパルス応答とインディシャル応答について解説する。システムの速応性や安定性の指標である整定時間、立ち上がり量、行き過ぎ量について述べる。
- 安定性（２回）
  - システムの安定性の概念を述べ、安定性を判定する代数的方法であるラウス-フルビッツの方法について説明する。
- 周波数特性（４回）
  - 周波数領域におけるシステムの特性を周波数特性という。周波数特性と伝達関数との関係を説明し、ベクトル軌跡とボード線図の作成方法を説明する。

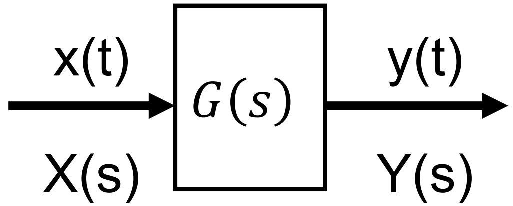
周波数応答を用いた制御システムの解析と設計

- 周波数応答とは
  - 正弦波入力に対する出力の周期定常状態
  - 周波数応答解析と根軌跡解析は似たもの同士
    - ゲイン変化，周波数変化
  - Nyquist, Bode, Nicholsら
  - ロバスト制御で必要となる
- 周波数応答の利点
  - 実験結果から伝達関数の推定が可能

正弦波入力に対する定常状態出力1

- 安定な線形時不変システム
  - 伝達関数$G(s)$

$$\frac{Y(s)}{X(s)}=G(s)=\frac{p(s)}{q(s)}=\frac{(s+b_1)(s+b_2)\cdots(s+b_m)}{(s+a_1)(s+a_2)\cdots(s+a_n)}$$



  - 入力$x(t)$ →正弦波

$$x(t)=A\sin\omega t$$

$$X(s)=\frac{A\omega}{s^2+\omega^2}$$

  - 出力$y(t)$ →入力と周波数が同じ正弦波となる
(ただし振幅・位相は異なる)

正弦波入力に対する定常状態出力2

- ラプラス変換形式の入力X(s)と出力Y(s)

$$Y(s) = G(s)X(s) = \frac{p(s)}{q(s)}X(s)$$

- 正弦波に対する伝達関数の定義
  - ラプラス演算子sをjωに置き換える

$$se^{j\omega t} \to \frac{d}{dt}e^{j\omega t} = j\omega e^{j\omega t} \quad \Rightarrow \quad s \to \frac{d}{dt} = j\omega$$

$$G(j\omega) = Me^{j\phi} = M\angle\phi$$

    - 入出力正弦波の振幅比:M,位相差:Φ

正弦波入力に対する定常状態出力3

- 安定な線形時不変システムの正弦波入力に対する応答の(周期)定常状態は，初期値に依存しない。
  - 初期値0と仮定して求める(部分分数展開)
    - 重根を持たない場合の応答

$$Y(s) = G(s)X(s) = G(s)\frac{A\omega}{s^2+\omega^2}$$

$$= \frac{a}{s+j\omega} + \frac{\bar{a}}{s-j\omega} + \frac{b_1{}'}{s+a_1} + \frac{b_2{}'}{s+a_2} + \cdots + \frac{b_n{}'}{s+a_n}$$

- ただしa, $\bar{a}$,b_1',⋯,$b_n{}'$は定数

正弦波入力に対する定常状態出力4

- ラプラス逆変換による時間応答の解(t≧0)
  - $y(t) = ae^{-j\omega t} + \bar{a}e^{j\omega t} + {b_1}'e^{-a_1 t} + {b_2}'e^{-a_2 t} + \cdots + {b_n}'e^{-a_n t}$
  - 安定なシステムでは$-a_1, -a_2, \cdots, -a_n$の実部は負
    - $e^{-a_1 t}, e^{-a_2 t}, \cdots, e^{-a_n t}$各項はt→∞でゼロに収束
  - 入力に対応する二項$ae^{-j\omega t}$, $\bar{a}e^{j\omega t}$は収束しない
  - 重根を持つ場合
    - m_j重根$s_j \rightarrow t^{h_j}e^{-s_j t}$ $\left(h_j = 0,1,2,\cdots,m_j - 1\right)$
      - 安定なシステムではt→∞で$t^{h_j}e^{-s_j t}$ はゼロに収束する
        - Expのテーラー展開$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$

正弦波入力に対する定常状態出力5

- 安定なシステムの定常状態の応答

単根，重根に関係なくt→∞で $y_{ss}(t) = ae^{-j\omega t} + \overline{a}e^{j\omega t}$

- 部分分数の係数

$$a = G(s)\frac{A\omega}{s^2+\omega^2}(s+j\omega)\bigg|_{s=-j\omega} = G(s)\frac{A\omega}{s-j\omega}\bigg|_{s=-j\omega} = -\frac{AG(-j\omega)}{2j}$$

$$\overline{a} = G(s)\frac{A\omega}{s^2+\omega^2}(s-j\omega)\bigg|_{s=j\omega} = G(s)\frac{A\omega}{s+j\omega}\bigg|_{s=j\omega} = \frac{AG(j\omega)}{2j}$$

正弦波入力に対する定常状態出力6

- 周波数応答の極座標表示
  - 伝達関数 $G(j\omega) = |G(j\omega)|e^{j\phi}$
    - 振幅　$|G(j\omega)|$
    - 位相　$\phi = \angle G(j\omega) = \tan^{-1}\frac{Im[G(j\omega)]}{Re[G(j\omega)]}$
  - 負の周波数に対する伝達関数
    $G(-j\omega) = |G(-j\omega)|e^{-j\phi} = |G(j\omega)|e^{-j\phi}$
  - 部分分数の係数
    $a = -\frac{A|G(j\omega)|e^{-j\phi}}{2j}, \bar{a} = \frac{A|G(j\omega)|e^{j\phi}}{2j}$

正弦波入力に対する定常状態出力7

- 定常状態の時間応答出力$y_{ss}(t)$

$$
\begin{aligned}
y_{ss}(t) &= a e^{-j\omega t} + \bar{a} e^{j\omega t} \\
&= -\frac{A|G(j\omega)|e^{-j\phi}}{2j} e^{-j\omega t} + \frac{A|G(j\omega)|e^{j\phi}}{2j} e^{j\omega t} \\
&= A|G(j\omega)| \frac{e^{j(\omega t+\phi)} - e^{-j(\omega t+\phi)}}{2j} \\
&= A|G(j\omega)| \sin(\omega t + \phi) \\
&= Y \sin(\omega t + \phi)
\end{aligned}
$$

オイラーの公式

正弦波

位相・振幅は
入力と異なる

$$Y = A|G(j\omega)|$$

正弦波入力に対する定常状態出力8

- 周波数伝達関数
  - $\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = G(j\omega) = \frac{(j\omega+b_1)(j\omega+b_2)\cdots(j\omega+b_m)}{(j\omega+a_1)(j\omega+a_2)\cdots(j\omega+a_n)}$
  - 入力正弦波に対する出力正弦波の振幅比
    - $|G(j\omega)| = \left|\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}\right|$
  - 入力正弦波に対する出力正弦波の位相ずれ
    - $\angle G(j\omega) = \angle \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$

周波数応答特性の図的表現法

- 周波数を変数とした正弦波伝達関数に対する図的表現方法
  - ボード線図(対数周波数-対数振幅，位相)
  - ナイキスト線図(複素平面)
  - ニコルス線図(対数振幅-位相)

ボード線図

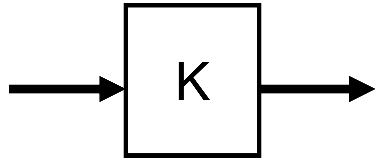
- 二つのグラフで構成
  - 横軸：対数周波数→Octave:2倍，Decade:10倍
  - 縦軸
    - 対数振幅(正弦波伝達関数)
      - 単位はdB $20\log_{10} x$
    - 位相
- 利点
  - 振幅の乗算が加算で表される（対数の性質）
  - 特性を直線近似して概算を求める事ができる

安定性

- ゲイン余裕
  - 位相が180°となる周波数において，0dBからのゲイン
    - この周波数において，ゲインが1より小さいとシステムは安定
- 位相余裕
  - ゲインが1(0dB)となる周波数において，-180°からの位相差

ボード線図
ゲインK

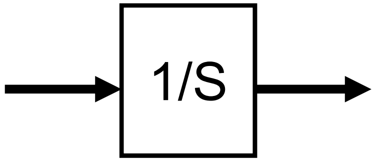
- ゲインKのボード線図上での扱い



  - $20\log_{10}K$（周波数に対して不変）
    - K>1に対して正
    - K<1に対して負
  - 振幅曲線を上下に移動
  - 位相曲線は不変 (0deg)
  - 10のn乗倍は$20\log(10^n)=20n$

ボード線図
積分

- 積分1/jωのボード線図上での扱い



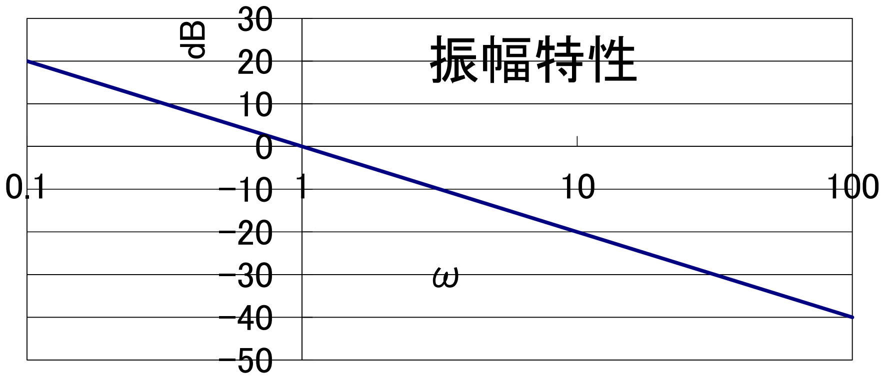
  - 振幅 $$20\log\left|\frac{1}{j\omega}\right| = -20\log\omega dB$$
    - ボード線図上では直線
      - 周波数が10倍になると

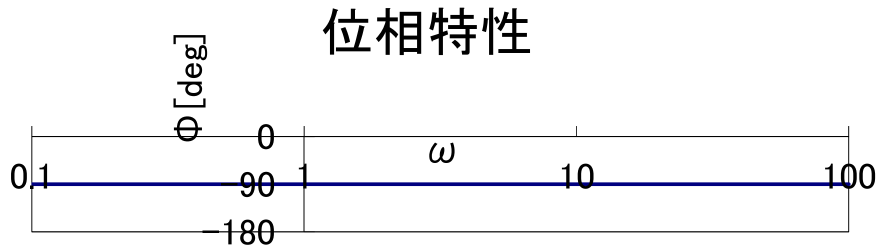
$$\angle\frac{1}{j\omega} = \angle -j\frac{1}{\omega} = -90^{\circ}$$

$$-20\log_{10}\omega[dB] = -20\log\omega - 20[dB]$$

        - -20dB/decade

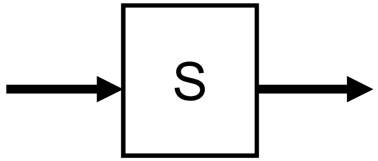
位相→∠1/jω一定(-90°)



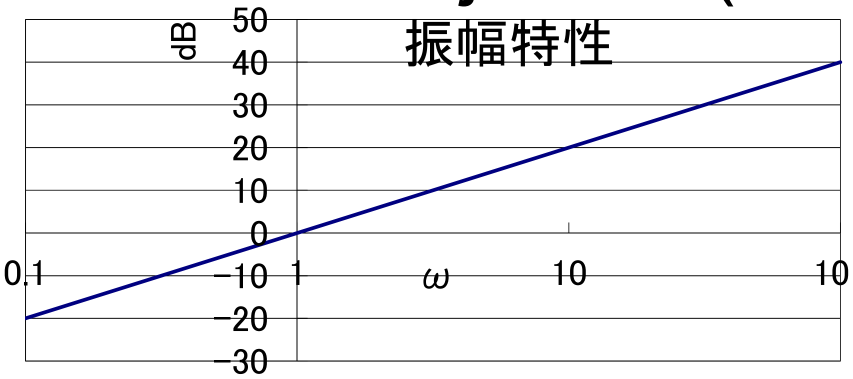


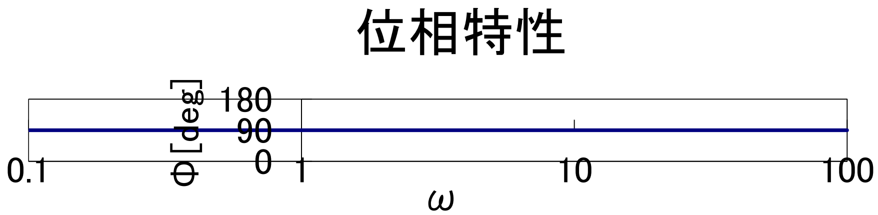
ボード線図
微分

- 微分jωのボード線図上での扱い



  - 振幅　$20\log|j\omega| = 20\log\omega dB$
    - ボード線図上では直線　$\angle j\omega = 90^\circ$
      - 周波数が10倍になると
        $$20\log_{10}\omega[dB] = 20\log\omega + 20[dB]$$
        - 20dB/decade
  - 位相→ ∠jω一定(90°)





ボード線図
一次のシステム1

- 一次のシステム $\longrightarrow \boxed{\dfrac{1}{1+sT}} \longrightarrow$ $\qquad \dfrac{1}{1+j\omega T}$

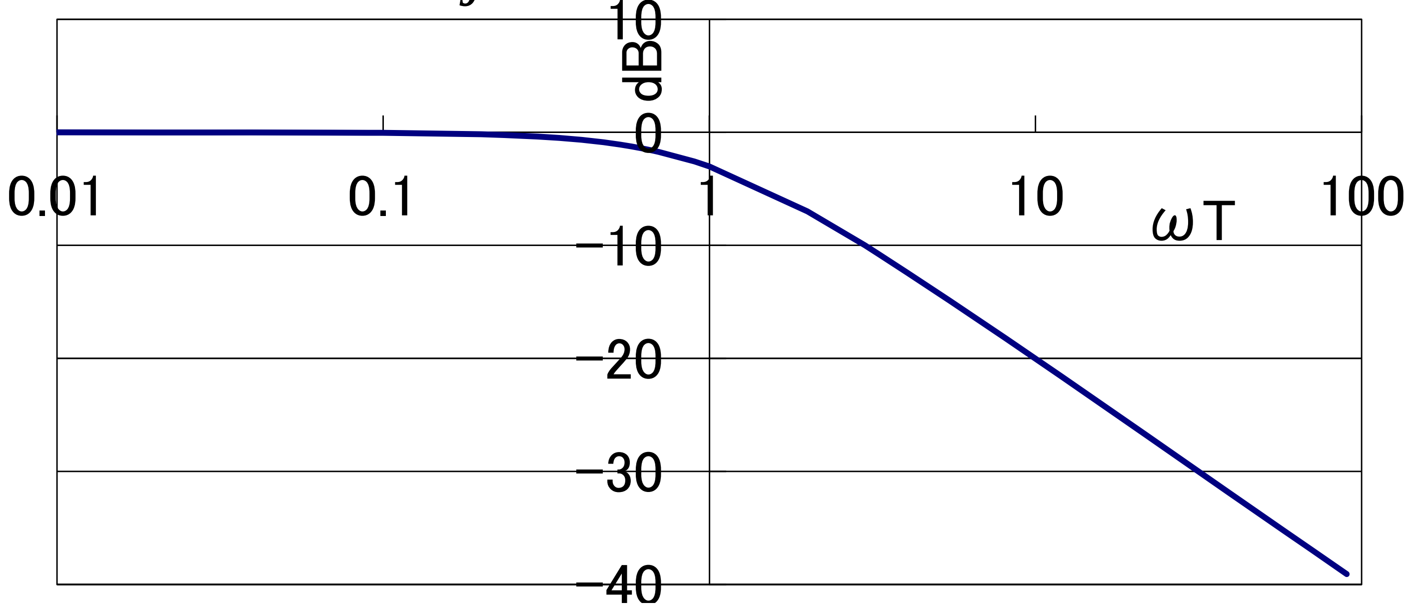
- 振幅 $$20\log\left|\frac{1}{1+j\omega T}\right| = -20\log\sqrt{1+\omega^2T^2}\,dB$$

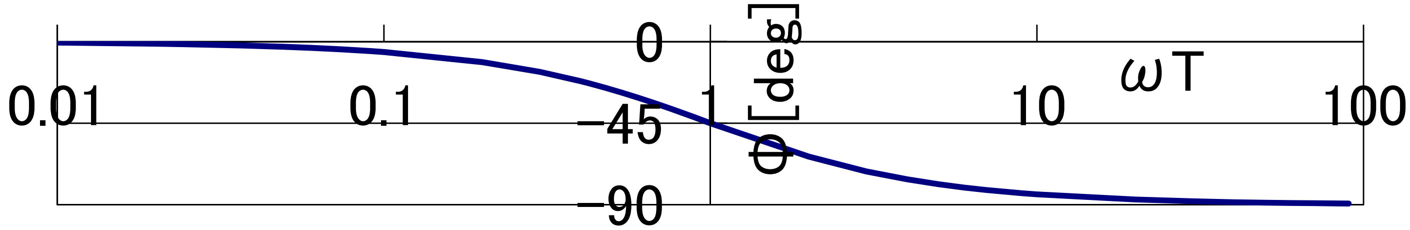
- 位相 $$\frac{1}{1+j\omega T} = \frac{1-j\omega T}{(1+j\omega T)(1-j\omega T)} = \frac{1-j\omega T}{1+(\omega T)^2}$$

$$\tan\phi = \frac{\left|\dfrac{-j\omega T}{1+(\omega T)^2}\right|}{\left|\dfrac{1}{1+(\omega T)^2}\right|} = -\omega T \quad \Rightarrow \quad \phi = -\tan^{-1}\omega T$$

ボード線図
一次のシステム2

- 一次のシステム $\dfrac{1}{1+j\omega T}$ LPF特性
  - 振幅
  - 位相





ボード線図
一次のシステム3

- 一次のシステム $\dfrac{1}{1+j\omega T}$
  - 振幅の性質

$$20\log\left|\frac{1}{1+j\omega T}\right| = -20\log\sqrt{1+\omega^2T^2}\,dB$$

    - 高周波(1<<ωT)

$$\sqrt{1+\omega^2T^2} \cong \omega T$$

$$-20\log\sqrt{1+\omega^2T^2} \cong -20\log\omega T dB$$

      - -20dB/decade
(周波数が一桁上がると振幅が20dB小さくなる)
        - 0dB for ω=1/T
        - -20dB for ω=10/T

近似

ボード線図
一次のシステム4

- 一次のシステム $\dfrac{1}{1+j\omega T}$
  - 振幅の性質

$$20\log\left|\frac{1}{1+j\omega T}\right| = -20\log\sqrt{1+\omega^2T^2}\,dB$$

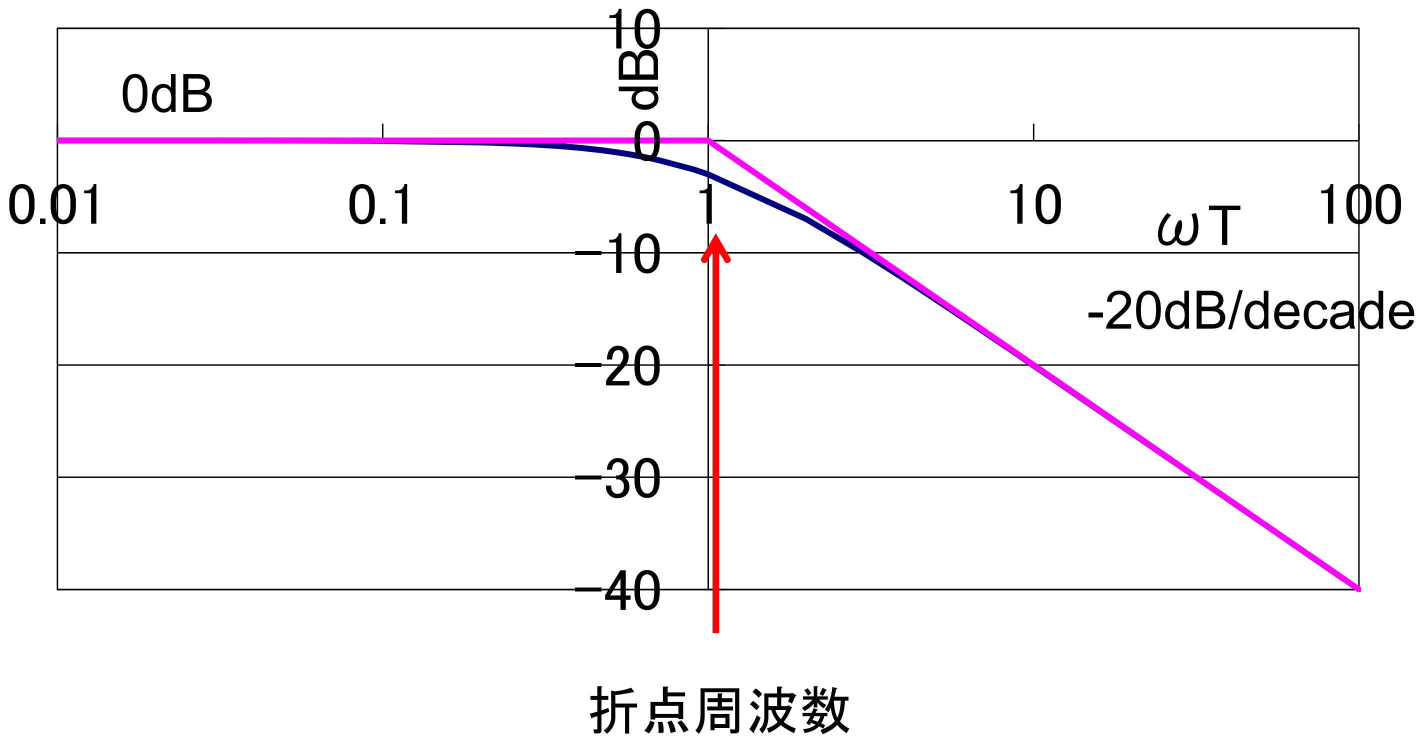
    - 低周波(ωT<<1)→ $\sqrt{1+\omega^2T^2} \cong 1$ ほぼ一定

$$-20\log\sqrt{1+\omega^2T^2} \cong -20\log 1 = 0dB$$

  - 振幅の近似線
    - 二つの直線で近似できる
      - 低周波領域0<ω<1/T→0dB
      - 高周波領域1/T<ω<∞→-20dB/decade $-20\log\omega T$
    - 折点周波数ωT=1で交わる

ボード線図
一次のシステム5

- 一次のシステム $\dfrac{1}{1+j\omega T}$
  - 振幅の近似線



ボード線図
一次のシステム6

- 一次のシステム $\dfrac{1}{1+j\omega T}$
  - 振幅の近似線の誤差
    - 最大値→折点周波数(ωT=1)（近似値$20\log 1 = 0$ dB）

$$-20\log\sqrt{1+1}+20\log 1=-\frac{20}{2}\log 2+0=-3.03dB$$

この外では
誤差1dB以下

- 1オクターブ下（近似値$20\log 1 = 0$ dB）

$$-20\log\sqrt{{}^{1}\!/_{4}+1}+20\log 1=-20\log\frac{\sqrt{5}}{2}=-0.97dB$$

- 1オクターブ上（近似値$20\log 2$ dB）

$$-20\log\sqrt{4+1}+20\log 2=-20\log\frac{\sqrt{5}}{2}=-0.97dB$$

1Decade離れると誤差は-0.04dB以下

ボード線図
一次のシステム7

- 一次のシステム $\dfrac{1}{1+j\omega T}$
  - 位相の性質
    - 折点周波数を中心に奇対称($\tan^{-1}$)

$$\phi = -\tan^{-1}\omega T$$

    - ωt=0(直流):0°
    - 折点周波数-45° $\phi = -\tan^{-1}\dfrac{\omega T}{\omega T} = -\tan^{-1} 1 = -45^\circ$
    - ωT→∞:-90°

ボード線図
一次のシステム8

- 一次のシステムの扱い $\longrightarrow \boxed{1+sT} \longrightarrow \quad 1+j\omega T$
  - 振幅→$\dfrac{1}{1+sT}$の符号反転

$$20\log\left|1+j\omega T\right| = -20\log\left|\frac{1}{1+j\omega T}\right|$$

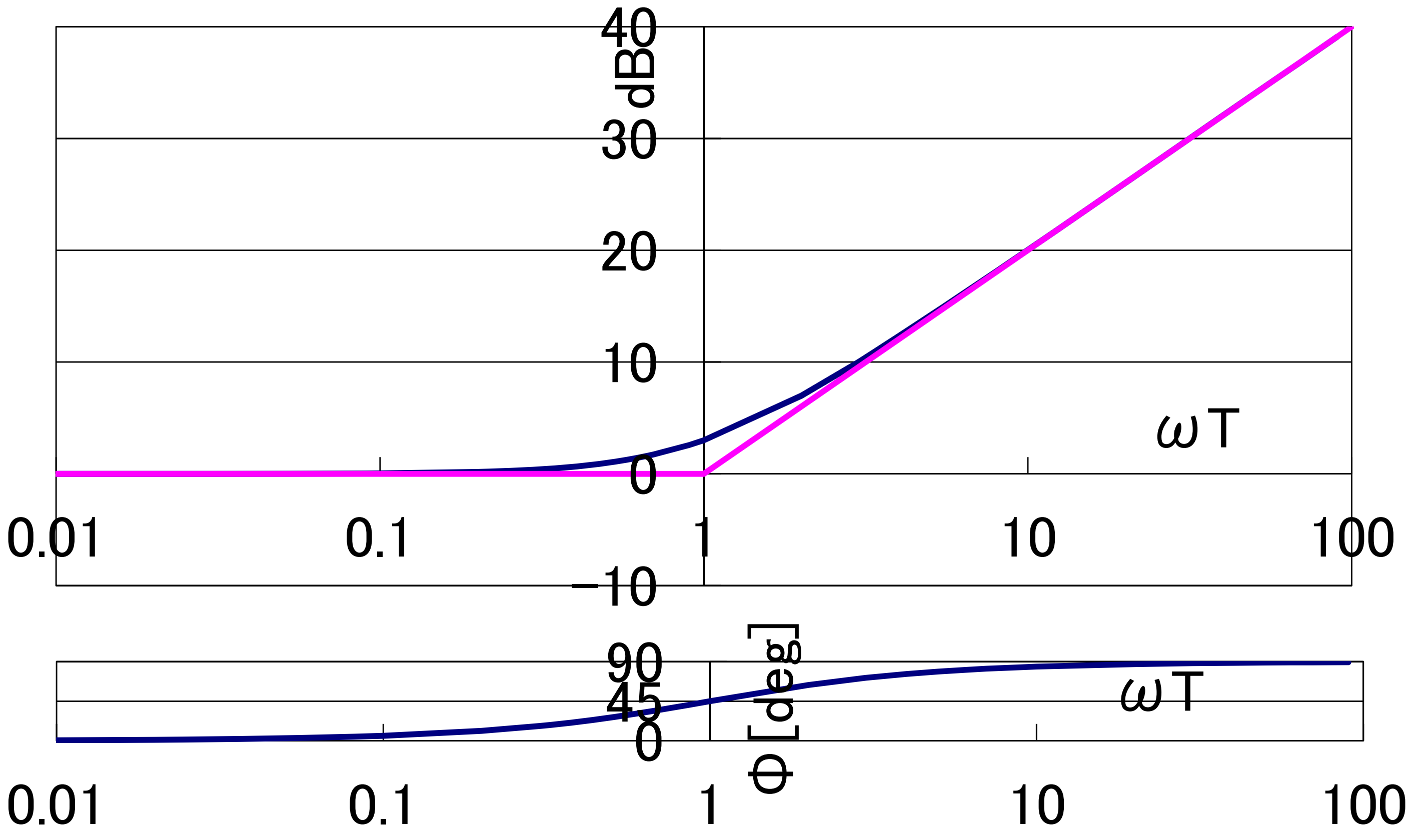
  - 位相→ $\dfrac{1}{1+sT}$の符号反転（0→90°）

$$\angle 1+j\omega T = \tan^{-1}\omega T = -\angle\frac{1}{1+j\omega T}$$

ボード線図は上下反転

ボード線図
一次のシステム9

- 一次のシステムの扱い　$1+j\omega T$　HPF特性



位相84.3°　ω=10/T
位相63.4°　ω=2/T
位相45°　ω=1/T
位相26.6°　ω=1/2T
位相5.7°　ω=1/10T

ボード線図は上下反転