

# 制御工学I 第13回 周波数特性 ボード線図

平成29年7月24日

# 授業の予定

- 制御工学概論(1回)
  - 制御技術は現在様々な工学分野において重要な基本技術となっている。工学における制御工学の位置づけと歴史について説明する。さらに、制御システムの基本構成と種類を紹介する。
- ラプラス変換(1回)
  - 制御工学、特に古典制御ではラプラス変換が重要な役割を果たしている。ラプラス変換と逆ラプラス変換の定義を紹介し、微分方程式のラプラス変換について解説する。
- 制御システムのモデリングと伝達関数(3回)
  - システムの相似性について概説し、システムの入出力特性を表す手法である伝達関数について詳述する。システムの図的表現であるブロック線図とその等価変換について解説する。
- 過渡特性(3回)
  - システムの過渡状態を評価する方法であるインパルス応答とインディシャル応答について解説する。システムの速応性や安定性の指標である整定時間、立ち上がり量、行き過ぎ量について述べる。
- 安定性(2回)
  - システムの安定性の概念を述べ、安定性を判定する代数的方法であるラウス-フルビッツの方法について説明する。
- 周波数特性(4回)
  - 周波数領域におけるシステムの特性を周波数特性という。周波数特性と伝達関数との関係を説明し、ベクトル軌跡とボード線図の作成方法を説明する。

# ボード線図

## 二次のシステム16

• 二次のシステム  $\rightarrow$   $\boxed{1 + 2\zeta \frac{1}{\omega_n} s + \frac{1}{\omega_n^2} s^2}$   $\rightarrow$

$$1 + 2\zeta \left( j \frac{\omega}{\omega_n} \right) + \left( j \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2$$

• 符号を反転

• 振幅(対数)

• 位相

• 折点  $\frac{\omega}{\omega_n} = 1$

$$\frac{1}{1 + 2\zeta \left( j \frac{\omega}{\omega_n} \right) + \left( j \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2}$$

# ボード線図の書き方

- 伝達関数  $G(s) = \frac{10s + 30}{s^4 + 3s^3 + 3s^2 + 4s} = \frac{10(s + 3)}{s(s + 2)(s^2 + s + 2)}$

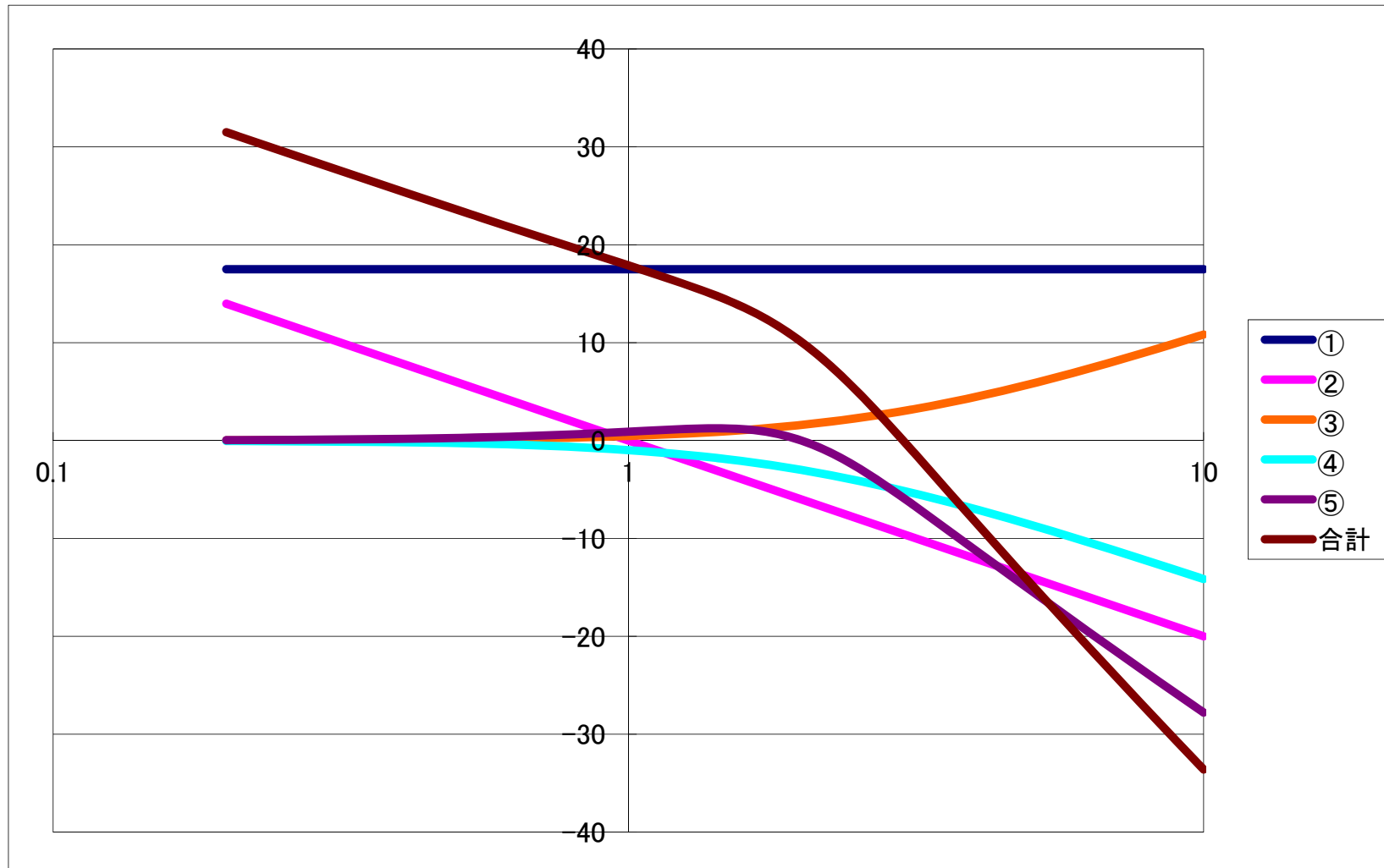
- 周波数伝達関数

$$G(j\omega) = \frac{10(j\omega + 3)}{j\omega(j\omega + 2)((j\omega)^2 + j\omega + 2)}$$
$$= \frac{10\left(1 + \frac{j\omega}{3}\right)3}{j\omega\left(1 + \frac{j\omega}{2}\right)2\left(1 + \frac{j\omega}{2} + \frac{(j\omega)^2}{2}\right)2} = \frac{7.5\left(1 + \frac{j\omega}{3}\right)}{j\omega\left(1 + \frac{j\omega}{2}\right)\left(1 + \frac{j\omega}{2} + \frac{(j\omega)^2}{2}\right)}$$

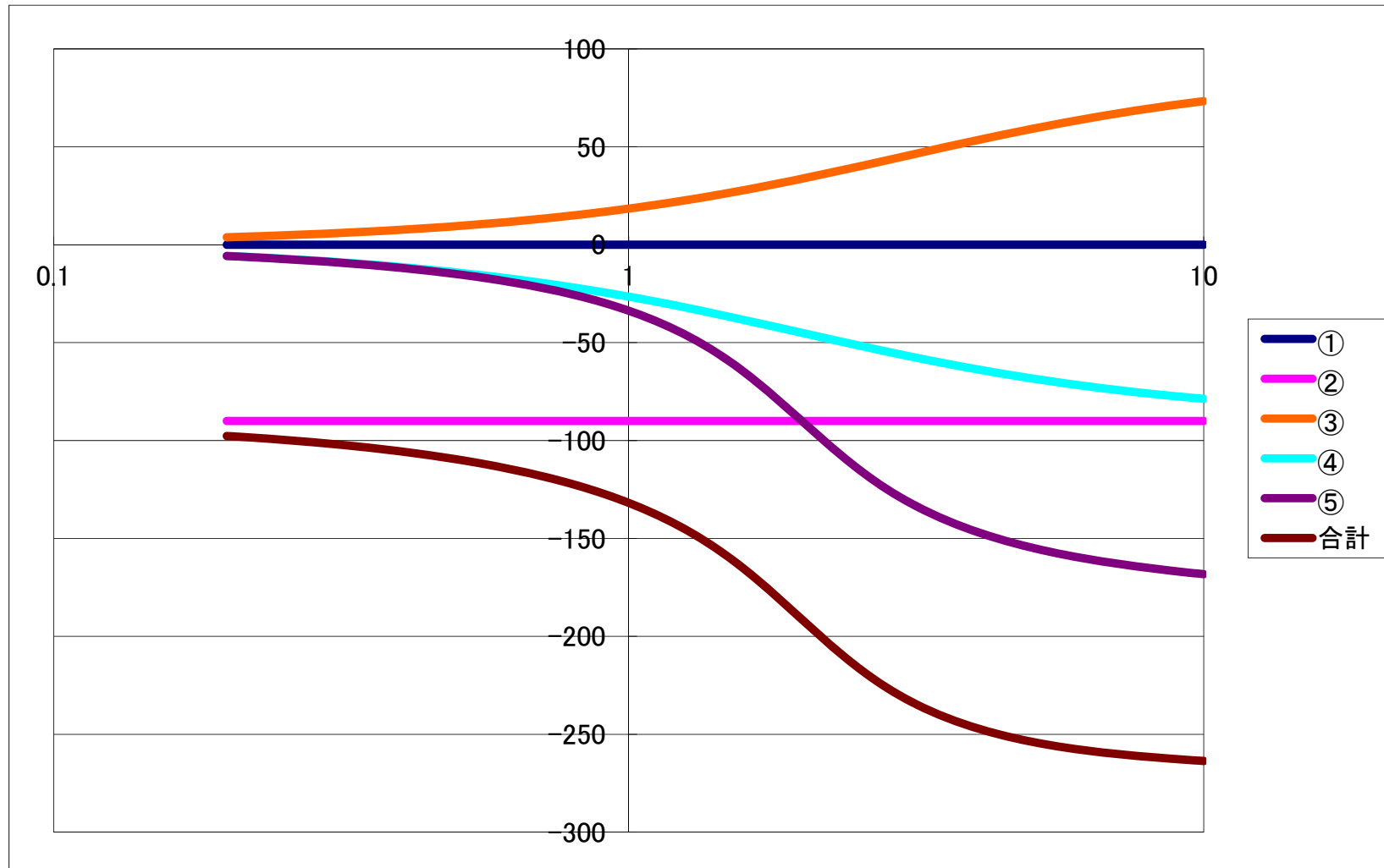
# ボード線図の書き方

- 周波数伝達関数の構成要素と振幅
  - $7.5$  水平直線:  $20\log 7.5$
  - $(j\omega)^{-1}$  直線: 傾き  $-20\text{dB/dec}$  ( $0\text{dB}$  @  $\omega=1$ )
  - $1 + \frac{j\omega}{3}$  近似直線:  $0\text{dB}$ , 折点  $\omega=3$ , 傾き  $20\text{dB/dec}$
  - $\left(1 + \frac{j\omega}{2}\right)^{-1}$  近似直線:  $0\text{dB}$ , 折点  $\omega=2$ , 傾き  $-20\text{dB/dec}$
  - $\left(1 + \frac{j\omega}{2} + \frac{(j\omega)^2}{2}\right)^{-1}$  近似直線: 減衰係数  $\zeta=0.3536$   
 $0\text{dB}$ , 折点  $\omega=\sqrt{2}$ , 傾き  $-40\text{dB/dec}$

# ボード線図ゲイン



# ボード線図位相



# ボード線図

- 全域通過フィルタ(APF):  $G(s) = \frac{1-sT}{1+sT}$
- 周波数伝達関数:  $G(j\omega) = \frac{1-j\omega T}{1+j\omega T}$ 
  - 振幅特性 → 変化しない
    - $|G(j\omega)| = \left| \frac{1-j\omega T}{1+j\omega T} \right| = \left| \frac{(1-j\omega T)^2}{(1+j\omega T)(1-j\omega T)} \right| = \frac{|1-\omega^2 T^2 - j2\omega T|}{1+\omega^2 T^2}$ 
$$= \frac{\sqrt{(1-\omega^2 T^2)^2 + 4\omega^2 T^2}}{1+\omega^2 T^2} = \frac{\sqrt{(1+\omega^2 T^2)^2}}{1+\omega^2 T^2} = 1$$
  - 位相特性 → 変化する
    - $\angle G(j\omega) = \angle \frac{1-j\omega T}{1+j\omega T} = \angle \frac{1-\omega^2 T^2 - j2\omega T}{1+\omega^2 T^2} = \tan^{-1} \frac{-2\omega T}{1-\omega^2 T^2}$



# 最小位相系・非最小位相系

- 最小位相系:安定かつ, 不安定零点を持たないシステム
  - 伝達関数の極, 零点が右半面に存在しない
  - 振幅特性から伝達関数が一意に定まる
    - 位相特性が求まる
    - 同じ振幅特性をもつシステムの中で位相が最小
- 非最小位相系
  - 伝達関数の極および/または零点が右半面に存在
  - 振幅特性から伝達関数が一意に定まらない

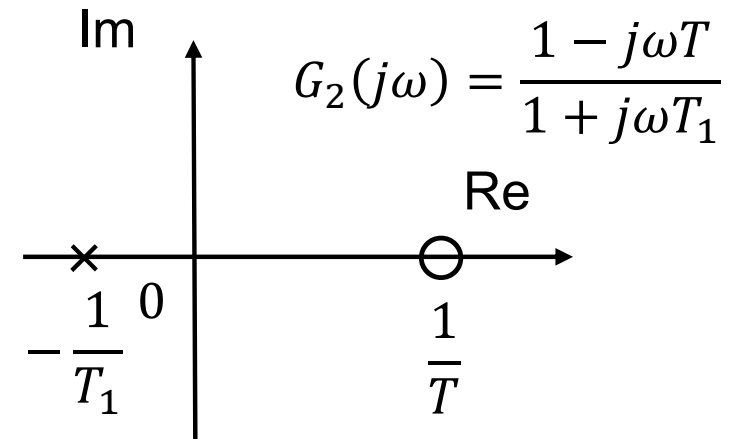
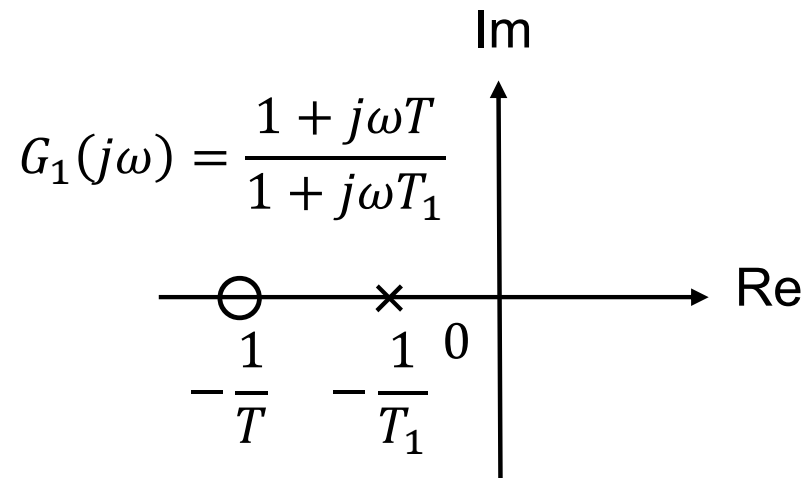
# 最小位相系・非最小位相系

- 例

- $G_1(s) = \frac{1+sT}{1+sT_1}, G_2(s) = \frac{1-sT}{1+sT_1}$

- ただし  $0 < T < T_1$

- 極, 零点配置



# 最小位相系・非最小位相系

- $G_1(j\omega)$ ,  $G_2(j\omega)$  の振幅特性は同じ

$$\begin{aligned} \bullet \quad |G_1(j\omega)| &= \left| \frac{1+j\omega T}{1+j\omega T_1} \right| = \left| \frac{(1+j\omega T)(1-j\omega T_1)}{(1+j\omega T_1)(1-j\omega T_1)} \right| \\ &= \frac{|1 + \omega^2 T T_1 + j\omega(T - T_1)|}{1 + \omega^2 T_1^2} \\ &= \frac{\sqrt{(1 + \omega^2 T T_1)^2 + \omega^2 (T - T_1)^2}}{1 + \omega^2 T_1^2} \\ &= \frac{\sqrt{1 + 2\omega^2 T T_1 + \omega^4 T^2 T_1^2 + \omega^2 T^2 - 2\omega^2 T T_1 + \omega^2 T_1^2}}{1 + \omega^2 T_1^2} \end{aligned}$$

# 最小位相系・非最小位相系

- $|G_1(j\omega)| =$ 
$$= \frac{\sqrt{1 + \omega^4 T^2 T_1^2 + \omega^2 T^2 + \omega^2 T_1^2}}{1 + \omega^2 T_1^2}$$
$$= \frac{\sqrt{(1 + \omega^2 T^2)(1 + \omega^2 T_1^2)}}{1 + \omega^2 T_1^2}$$
- $|G_2(j\omega)| = \left| \frac{1-j\omega T}{1+j\omega T_1} \right| = \left| \frac{(1-j\omega T)(1-j\omega T_1)}{(1+j\omega T_1)(1-j\omega T_1)} \right|$ 
$$= \frac{|1 - \omega^2 T T_1 - j\omega(T + T_1)|}{1 + \omega^2 T_1^2}$$

# 最小位相系・非最小位相系

- $|G_2(j\omega)| = \frac{\sqrt{(1-\omega^2 TT_1)^2 + \omega^2(T+T_1)^2}}{1+\omega^2 T_1^2}$ 
$$= \frac{\sqrt{1 - 2\omega^2 TT_1 + \omega^4 T^2 T_1^2 + \omega^2 T^2 + 2\omega^2 TT_1 + \omega^2 T_1^2}}{1 + \omega^2 T_1^2}$$
$$= \frac{\sqrt{1 + \omega^4 T^2 T_1^2 + \omega^2 T^2 + \omega^2 T_1^2}}{1 + \omega^2 T_1^2}$$
$$= \frac{\sqrt{(1 + \omega^2 T^2)(1 + \omega^2 T_1^2)}}{1 + \omega^2 T_1^2}$$

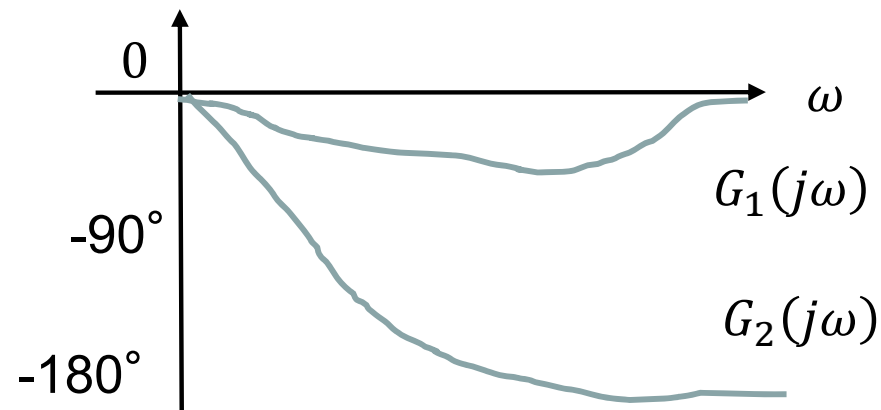
- $\rightarrow |G_1(j\omega)|$

# 最小位相系・非最小位相系

- $G_1(j\omega)$ ,  $G_2(j\omega)$  の位相特性は異なる

- $\angle G_1(j\omega) = \angle \frac{1+\omega^2 TT_1 + j\omega(T-T_1)}{1+\omega^2 T_1^2} = \tan^{-1} \frac{\omega(T-T_1)}{1+\omega^2 TT_1}$

- $\angle G_2(j\omega) = \angle \frac{1-\omega^2 TT_1 - j\omega(T+T_1)}{1+\omega^2 T_1^2} = \tan^{-1} \frac{-\omega(T+T_1)}{1-\omega^2 TT_1}$

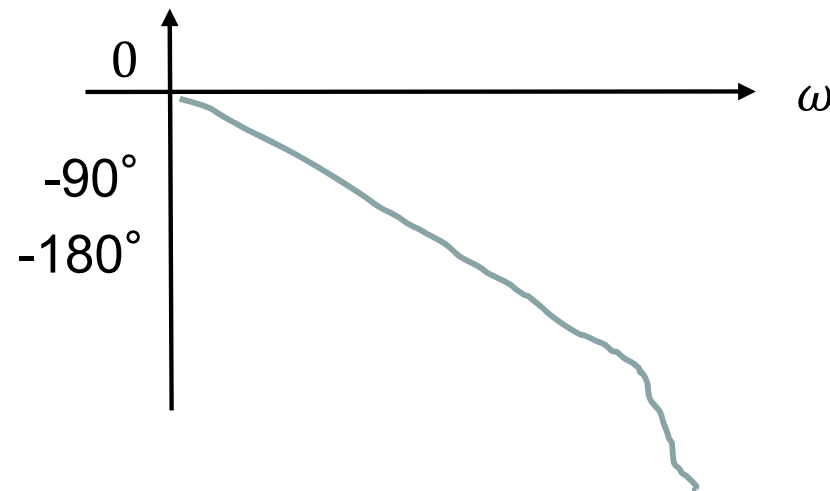


# 最小位相系・非最小位相系

- 伝達関数の分子の次数 $p$ ，分母の次数 $q$
- 振幅特性(最小位相系・非最小位相系共)
  - $\omega \rightarrow \infty$ における傾き  $-20(q-p)$  dB/dec
- 位相特性
  - $\omega \rightarrow \infty$  最小位相系  $-90(q-p)$  deg
  - 非最小位相系  $-90(q-p)$  degとならない
- 振幅特性と位相特性を見れば最小位相系かどうか分かる
- 非最小位相系は，位相遅れのため応答遅い

# 伝達遅れ(むだ時間)

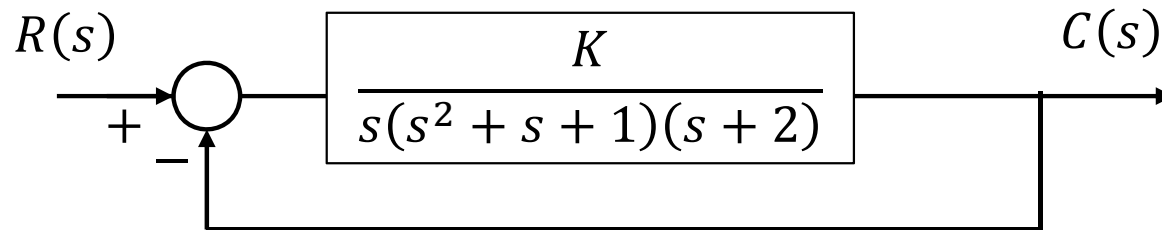
- 伝達関数  $G(s) = e^{-sT}$ 
  - 非最小位相系  $G(j\omega) = e^{-j\omega T}$
  - 振幅特性: 高周波でも振幅変わらない
    - $|G(j\omega)| = |\cos \omega T - j \sin \omega T| = 1$
  - 位相特性: 高周波では位相遅れ大
    - $\angle G(j\omega) = -\omega T$  [rad]





# ラウスの安定判別を使った 制御パラメータ設定

- フィードバックシステム



- 伝達関数

- $$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{s(s^2 + s + 1)(s + 2) + K}$$

- 特性方程式

- $$s^4 + 3s^3 + 3s^2 + 2s + K = 0$$

# ラウスの安定判別を使った 制御パラメータ設定

- ラウス表

- $$s^4 + 3s^3 + 3s^2 + 2s + K = 0$$

$s^4$	1	3	$k$
$s^3$	3	2	
$s^2$	$\frac{7}{3}$	$K$	
$s^1$	$2 - \frac{9}{7}K$		
$s^0$	$K$		

- 安定領域

- $$2 - \frac{9}{7}K > 0 \rightarrow 0 < K < \frac{14}{9}$$

$$\alpha_i^{k+2} = \alpha_{i+1}^k - \frac{\alpha_0^k \alpha_{i+1}^{k+1}}{\alpha_0^{k+1}}$$

$s^n$	$\alpha_0^0$	$\alpha_1^0$	$\dots$	$\alpha_m^0$
$s^{n-1}$	$\alpha_0^1$	$\alpha_1^1$	$\dots$	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$			$\dots$
$s^0$	$\alpha_0^n$		$\alpha_2^3$	$\dots$

# ラウスの安定判別を使った 制御パラメータ設定

- 特性方程式

- $s^4 + Ks^3 + s^2 + s + 1 = 0$

- ラウス表

$s^4$	1	1	1
$s^3$	$K$	1	0
$s^2$	$\frac{K-1}{K}$	1	
$s^1$	$1 - \frac{K^2}{K-1}$	1	
$s^0$	1		

- 安定条件

- $K > 0$

- $\frac{K-1}{K} > 0$

- $K > 1$

- $1 - \frac{K^2}{K-1} > 0$

- $\frac{K-1-K^2}{K-1} > 0$

- $K - 1 - K^2 > 0$

- $-\left(K - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} > 0$

- $K > 1$ だと成り立たない

# フルビッツ行列を用いた 制御パラメータ設定

- $a_0s^4 + a_1s^3 + a_2s^2 + a_3s + a_4 = 0$
- フルビッツ行列

$$\bullet \Delta_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & & & \\ a_0 & a_2 & a_4 & & \\ & a_1 & a_3 & & \\ & a_0 & a_2 & a_4 & \end{vmatrix}$$

$$\bullet \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & & \\ a_0 & a_2 & a_4 & \\ & a_1 & a_3 & \end{vmatrix}$$

$$\bullet \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}$$

$$\bullet \Delta_1 = |a_1|$$

- $\Delta_3 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_1 > 0$ で安定

# フルビッツ行列を用いた 制御パラメータ設定

- $s^4 + 2s^3 + (4 + K)s^2 + 9s + 25 = 0$ 
  - $\Delta_1 = |2| = 2$
  - $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 4 + K \end{vmatrix} = 2(4 + K) - 9 = 2K - 1 > 0$
  - $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 9 & 25 \\ 1 & 4 + K & 9 \\ 25 & 2 & 9 \end{vmatrix} = 2(4 + K)9 - 9 \times 9 - 2 \times 2 \times 25 = 18K - 109 > 0$
  - $K > \frac{109}{18} > \frac{1}{2}$