制御工学I
第3回
制御システムの
モデリングと伝達関数1

平成29年4月24日

授業の予定

- 制御工学概論（１回）
  - 制御技術は現在様々な工学分野において重要な基本技術となっている。工学における制御工学の位置づけと歴史について説明する。さらに、制御システムの基本構成と種類を紹介する。
- ラプラス変換（１回）
  - 制御工学、特に古典制御ではラプラス変換が重要な役割を果たしている。ラプラス変換と逆ラプラス変換の定義を紹介し、微分方程式のラプラス変換について解説する。
- 制御システムのモデリングと伝達関数（３回）
  - システムの相似性について概説し、システムの入出力特性を表す手法である伝達関数について詳述する。システムの図的表現であるブロック線図とその等価変換について解説する。
- 過渡特性（３回）
  - システムの過渡状態を評価する方法であるインパルス応答とインディシャル応答について解説する。システムの速応性や安定性の指標である整定時間、立ち上がり量、行き過ぎ量について述べる。
- 安定性（２回）
  - システムの安定性の概念を述べ、安定性を判定する代数的方法であるラウス-フルビッツの方法について説明する。
- 周波数特性（４回）
  - 周波数領域におけるシステムの特性を周波数特性という。周波数特性と伝達関数との関係を説明し、ベクトル軌跡とボード線図の作成方法を説明する。

制御システムのモデリングと評価

- 制御対象のモデリング
  - 微分方程式・代数方程式
    - 物理モデルによる入出力関係の表現
      - 物理・化学法則
  - 簡略化
    - 制御則の設計に適した形
    - 線形化
      - 対象が非線形の場合
- 制御則の設計
  - 誤差の考慮
    - モデル化
    - 簡略化
    - 実装
- システムの特性評価
  - 制御則をシステムに実装
  - 実システム・数値解析で評価

システムのダイナミクス

- システム
  - 電気回路，機械，熱，経済，生体などなど
- ダイナミクス
  - 物理法則→微分方程式で表現
  - 数学モデルの導出⇒制御では重要
- 1入力1出力(SISO)線形時不変システム(後で説明)
  ⇒伝達関数モデルとして表せる
- 因果律
  - 過去の入力は現在の出力に影響を及ぼす
  - 未来の入力は現在の出力に影響を及ぼさない
    - 式を使った説明はあとで

モデル化

- モデルに要求される性質⇒簡便さと正確さ
  - 簡素化
    - 支配的でない物理的性質の省略
    - 非線形性
    - 分布定数的性質

時変係数等
偏微分

影響が小さいと
数学モデルと実験が合致する

  - 結果の妥当性
    - 線形集中定数モデル
      - 低周波では妥当
      - 高周波では？ → 分布定数の影響が大きい
- 線形システム
  - 重ね合わせの理が適用可能

線形時不変システムと
線形時変システム

- 線形時不変システム
  - 線形時不変の集中定数要素
  - 定係数(時不変)の線形微分方程式
    - 充電したコンデンサCの抵抗負荷Rに対する放電
    - バネにぶら下がったおもりの運動
- 線形時変システム
  - 係数が時間変化する微分方程式
    - ロケットのモデル(重量が燃料消費で変化)

伝達関数

- 線形時不変微分方程式で表される系
  - 微分方程式表現(変数x,y,係数$a_i(i = 0, \cdots, n)$, $b_j(j = 0, \cdots, m)$)

$$a_0 \overset{(n)}{y} + a_1 \overset{(n-1)}{y} + \cdots + a_{n-1}\dot{y} + a_n y = b_0 \overset{(m)}{x} + b_1 \overset{(m-1)}{x} + \cdots + b_{m-1}\dot{x} + b_m x$$

  - ラプラス変換（初期値0）

$$a_0 s^n Y + a_1 s^{n-1} Y + \cdots + a_{n-1} sY + a_n Y = b_0 s^m X + b_1 s^{m-1} X + \cdots + b_{m-1} sX + b_m X$$

- 伝達関数
  - 入力x・出力yのラプラス変換X,Yの比
  - 初期値0を仮定

$$G(s) = \left.\frac{L[出力]}{L[入力]}\right|_{初期値=0} = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

伝達関数とラプラス変換

- 線形時不変システムの伝達関数
  - $G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$
  - $X(s)$:入力$x(t)$のラプラス変換　$X(s) = \mathcal{L}[x(t)]$
  - $Y(s)$:出力$y(t)$のラプラス変換　$\mathrm{Y}(s) = \mathcal{L}[y(t)]$
  - $Y(s) = G(s)X(s)$
  - $y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}[G(s)X(s)]$

伝達関数

- 伝達関数

$$a_0 s^n Y + a_1 s^{n-1} Y + \cdots + a_{n-1} s Y + a_n Y = b_0 s^m X + b_1 s^{m-1} X + \cdots + b_{m-1} s X + b_m X$$

$$\left(a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n\right) Y = \left(b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m\right) X$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

$$= \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n}$$

- n次システム(分母)
  - $n \geq m$の時$G(s)$はプロパー という
  - $n > m$の時$G(s)$は厳密にプロパー という

伝達関数

- $G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{N(s)}{D(s)}$
  - 分母多項式（特性多項式）
    $D(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n$
  - 分子多項式
    $N(s) = b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m$
  - $G(s)$は分母多項式と分子多項式の有理関数

伝達関数

- $G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{k(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}$
  - 伝達関数$G(s)$の極 $p_1, p_2, \cdots, p_n$
    - 特性方程式 $D(s) = 0$
    - 特性根 $p_1, p_2, \cdots, p_n$
  - 伝達関数$G(s)$の零点

$$z_1, z_2, \cdots, z_m$$

伝達関数の状態方程式表現

- 状態方程式
  - $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$
- 出力方程式
  - $y(t) = g(x(t), t)$

- $x(t)$:状態変数(n次元)
- $u(t)$:入力変数(r次元)
- $y(t)$:出力変数(m次元)
- f, g:ベクトル関数

- ダイナミカルシステム
  - 時刻t_1の出力$y(t_1)$が，過去の入力$\{u(t): t \leq t_1\}$の影響を受ける

f, gが線形ベクトル関数の場合
- $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$
- $y(t) = C(t)x(t)$

$A(t)$, $B(t)$, $C(t)$が定数行列の場合
- $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$
- $y(t) = Cx(t)$

線形時不変連続時間システム

状態方程式のラプラス変換

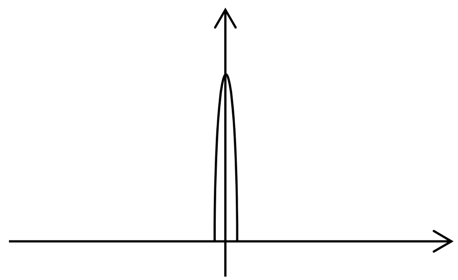
- 状態方程式･出力方程式のラプラス変換
  - $sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s)$
  - $Y(s) = CX(s)$
- 初期値$x(0)$を0としてまとめる
  - $\{sI - A\}X(s) = BU(s)$
  - $X(s) = \{sI - A\}^{-1}BU(s)$
  - $Y(s) = C\{sI - A\}^{-1}BU(s)$
  - 伝達関数行列$G_{yu}(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C\{sI - A\}^{-1}B$

伝達関数の特徴

- 入出力の関係を表す数学モデルである
- 入力の大きさや性質に依存しない
- 入出力の関係を表すが，システムの物理的構造を表すものではない
  - 電気･機械等異なる性質のものを表せる
- 入力から出力を推定できる
  ⇒システムの性質がわかる
- 既知の入力に対して得られる出力より，伝達関数を推定する事ができる

インパルス応答

- 単位インパルス入力に対する出力(初期値0)
  - 単位インパルス入力　$x(t) = \delta(t)$
    - 入力　$\mathcal{L}[x(t)] = X(s) = 1$
    - 出力　$Y(s) = G(s)X(s) = G(s)$

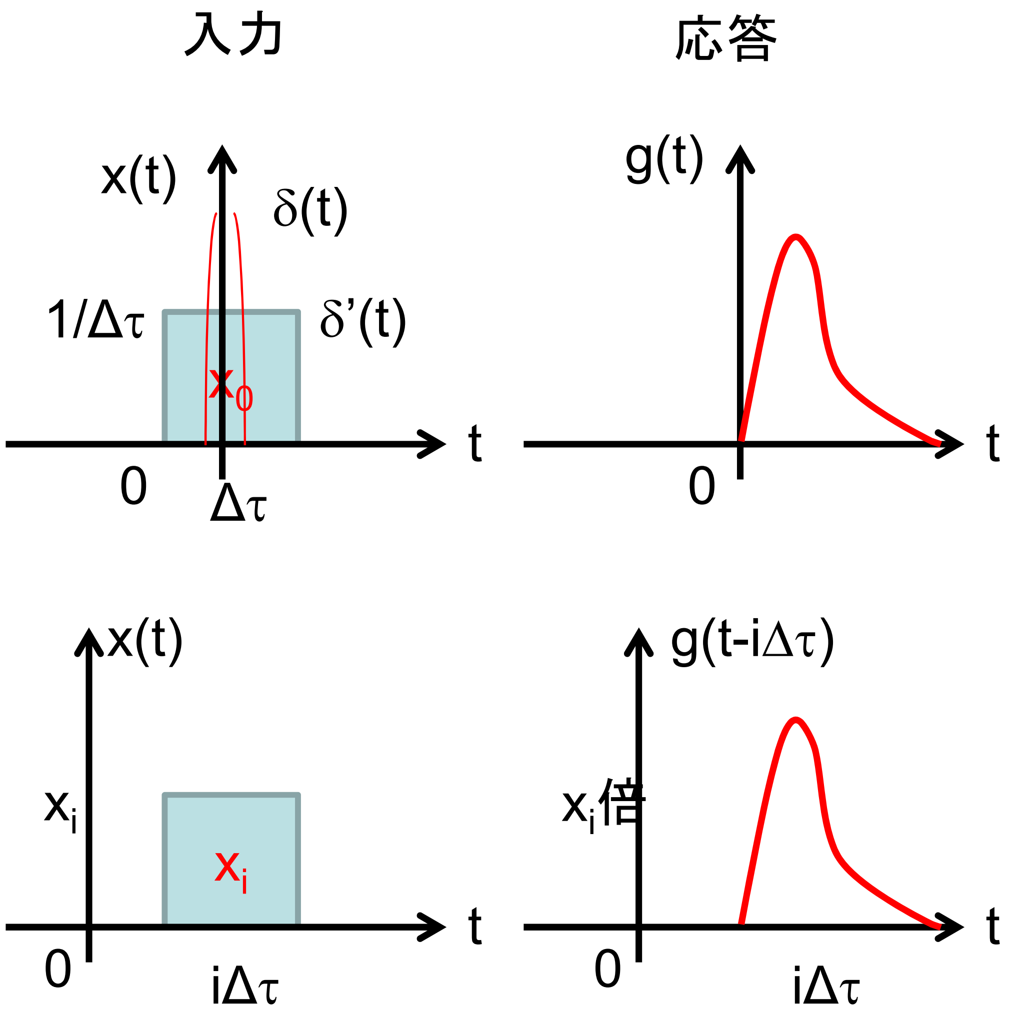


- 伝達関数$G(s)$ のラプラス逆変換
  →インパルス応答関数$\mathcal{L}^{-1}[G(s)] = g(t)$

幅はないが積分すると1

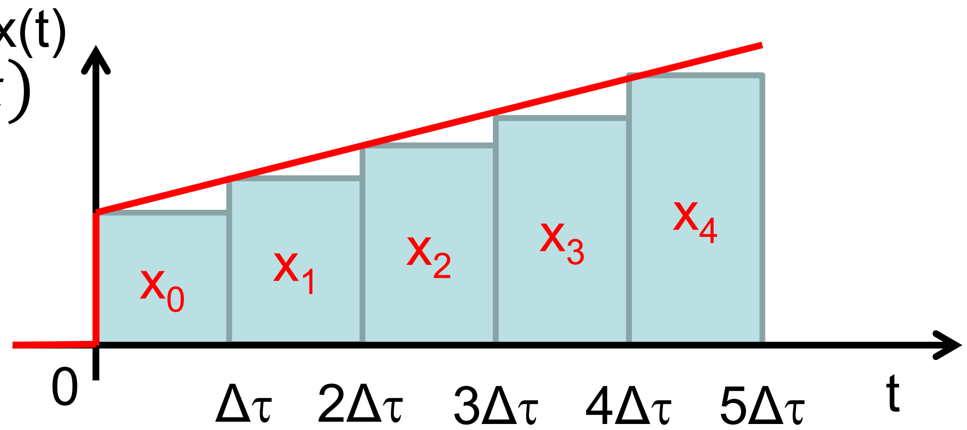
インパルス応答

- t=0で面積1となる基準入力δ'(t)(幅Δτ,高さ1/Δτ)
  - システムの応答をg(t)とする。ただしg(t)=0;t<0
  - 入力x_iは，基準入力を時間iΔτずらし，高さをx_iΔτ倍したもの(面積を合わす)
  - 入力x_iに対する応答 $y_i(t)=g(t-i\Delta\tau)\ x_i\Delta\tau$



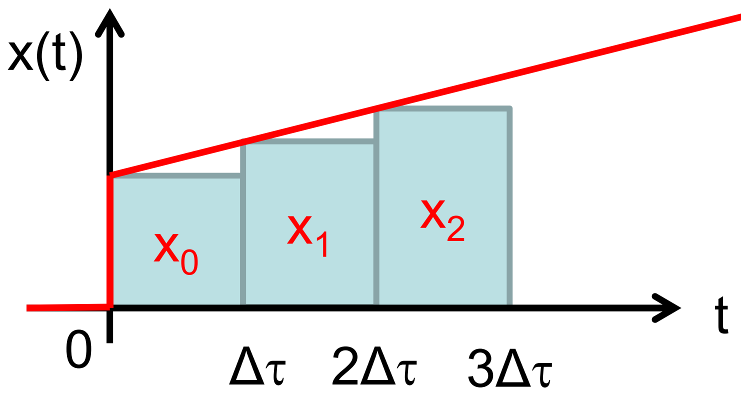
インパルス応答

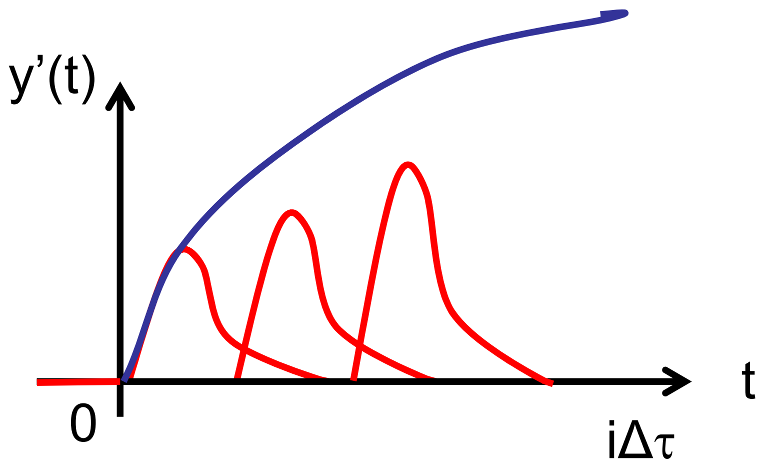
- 入力$x(t)$を刻み時間Δt で$x_0, x_1, x_2, \cdots$に分割
  - $x_i = x(i\Delta t)$
  - 再合成した入力
    - $x'(t) = x(0)\delta'(t) + x(\Delta t)\delta'(t - \Delta t) + x(2\Delta t)\delta'(t - 2\Delta t) + \cdots$
      $= \sum_{i=0} x(i\Delta t)\delta'(t - i\Delta t)$
  - 極限
    - $\lim_{\Delta t \to +0} x'(t) = x(t)$



インパルス応答

- 入力$x'(t)$に対する出力$y'(t)$は重ね合わせで得られる
  - $y'(t) = g(t)x(0)\delta'(t) + g(t-\Delta t)x(\Delta t)\delta'(t-\Delta t) + g(t-2\Delta t)x(2\Delta t)\delta'(t-2\Delta t) + \cdots$
    $= \sum_{i=0} g(t-i\Delta t)x(i\Delta t)\delta'(t-i\Delta t)$





インパルス応答

- 極限
  - $\lim_{\Delta t \to +0} y'(t) = \lim_{\Delta t \to +0} \sum_{i=0} g(t - i\Delta t)x(i\Delta t)\delta(t - i\Delta t)$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} g(t-\tau)x(\tau)d\tau$$

    - 畳み込み積分

畳み込み積分

- 時間領域の畳み込み積分
  - 入力$x(t)$に対する応答$y(t)$を表す
    - 入出力を関連付ける関数$g(t)$

$$y(t)=\int_0^t g(t-u)x(u)du=\int_0^t g(u)x(t-u)du$$

  - 複素領域の乗算と等価
    - ただしg(t)=0,x(t)=0 for t<0

$$y(t)=L^{-1}[Y(s)]=L^{-1}[G(s)X(s)]$$

$$=g(t)*x(t)=\int_{-\infty}^{\infty} g(t-u)x(u)du$$

畳み込み積分

- 関数の合成積
  - 関数$\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, $\mathcal{L}[g(t)] = G(s)$
  - 関数の合成積$f * g(t) = \int_0^t f(t-u)g(u)du$
  - ラプラス変換$\mathcal{L}[f * g] = \int_0^\infty f * g(t)e^{-st}dt$

    $$= \int_0^\infty \int_0^t f(t-u)g(u)du\, e^{-st}dt$$

    - 積分の順番変える⇒積分経路の変更
      - u: 0~tの積分，t:0~∞の積分
⇒t:0~∞の積分，u:t~∞の積分

畳み込み積分

- $= \int_0^\infty \int_0^t f(t-u)g(u)du\, e^{-st}dt$

$$= \int_0^\infty g(u) \int_t^\infty f(t-u)e^{-st}dt\, du$$

$$= \int_0^\infty g(u) \left\{ \int_0^\infty f(t-u)e^{-st}dt - \int_0^t f(t-u)e^{-st}dt \right\} du$$

- $\mathcal{L}\,[f(t-u)] = e^{-su}F(s)$より$f(t-u) = 0(\mathrm{u} < \mathrm{t})$

畳み込み積分

- $= \int_0^\infty g(u)[e^{-su}F(s) - 0]du$

$$= \int_0^\infty g(u)e^{-su}F(s)du$$

$$= F(s)\int_0^\infty g(u)e^{-su}du$$

$$= F(s)G(s)$$

畳み込み積分

- 特長
  - 交換律　$f * g = g * f$
  - 結合律　$(f * g) * h = f * (g * h)$
  - 分配律　$f * (g + h) = (f * g) + (f * h)$
  - スカラー倍　$\mathrm{a}(f * g) = (af) * g = f * (ag)$
  - 微分　$\mathrm{D}(f * g) = Df * g = f * Dg$
- 線形時不変システムの特徴
  - 重ね合わせが可能⇔畳み込み積分