

制御工学I 第8回

過渡特性3

平成29年6月12日

授業の予定

- 制御工学概論(1回)
 - 制御技術は現在様々な工学分野において重要な基本技術となっている。工学における制御工学の位置づけと歴史について説明する。さらに、制御システムの基本構成と種類を紹介する。
- ラプラス変換(1回)
 - 制御工学、特に古典制御ではラプラス変換が重要な役割を果たしている。ラプラス変換と逆ラプラス変換の定義を紹介し、微分方程式のラプラス変換について解説する。
- 制御システムのモデリングと伝達関数(3回)
 - システムの相似性について概説し、システムの入出力特性を表す手法である伝達関数について詳述する。システムの図的表現であるブロック線図とその等価変換について解説する。
- 過渡特性(3回)
 - システムの過渡状態を評価する方法であるインパルス応答とインディシャル応答について解説する。システムの速応性や安定性の指標である整定時間、立ち上がり量、行き過ぎ量について述べる。
- 安定性(2回)
 - システムの安定性の概念を述べ、安定性を判定する代数的方法であるラウス-フルビッツの方法について説明する。
- 周波数特性(4回)
 - 周波数領域におけるシステムの特性を周波数特性という。周波数特性と伝達関数との関係を説明し、ベクトル軌跡とボード線図の作成方法を説明する。

二次のシステムの応答

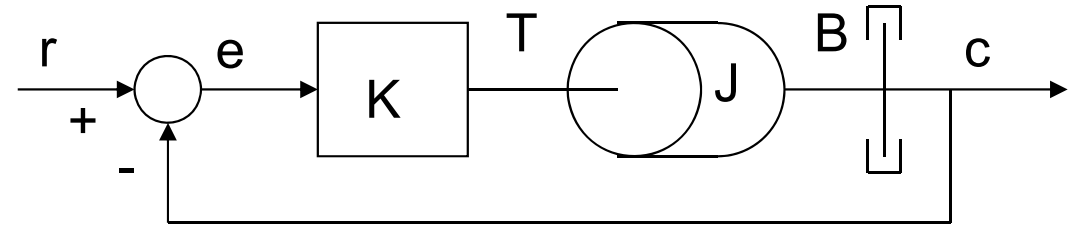
- サーボシステム

- 比例制御系

- 入力位置 r
- 制御出力位置 c
- ゲイン K

- 負荷

- 慣性 J
- 粘性抵抗 B
- トルク T
- 運動方程式: $J\ddot{c} + B\dot{c} = T$



$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{Js^2 + Bs + K} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

固有角周波数: $\omega_n = \sqrt{\frac{K}{J}}$

減衰係数(減衰比): $\zeta = \frac{B}{2\omega_n J}$

二次のシステムのステップ応答

- ステップ入力分かれば他の応答もわかる

- 単位ステップ入力: $R(s) = \frac{1}{s}$ $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$

- 減衰係数による応答の分類

- 持続振動: $\zeta=0$ $C(s) = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + \omega_n^2}$ $c(t) = 1 - \cos \omega_n t$

- 弱制動: $0 < \zeta < 1$: $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$
 $C(s) = \frac{1}{s} - \frac{s + \zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} - \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \frac{\omega_d}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2}$
 $c(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \left(\sqrt{1 - \zeta^2} \cos \omega_d t + \zeta \sin \omega_d t \right)$

二次のシステムのステップ応答

- 臨界制動: $\zeta=1$ (重根)

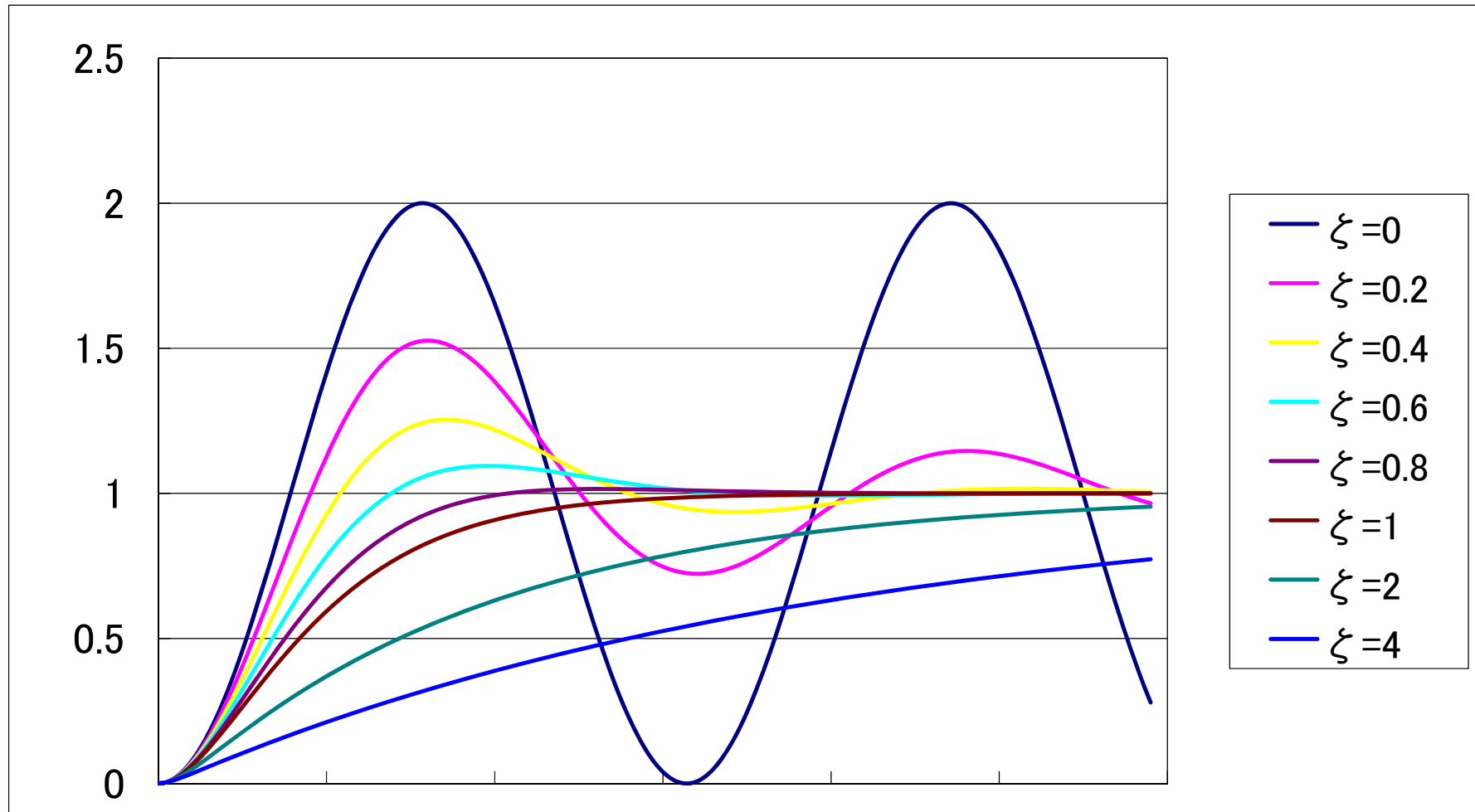
$$C(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \omega_n} - \frac{\omega_n}{(s + \omega_n)^2} \quad c(t) = 1 - e^{-\omega_n t} (1 + \omega_n t)$$

- 過制動: $\zeta > 1$

$$C(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left[\frac{1}{s + \left(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\omega_n} - \frac{1}{s + \left(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\omega_n} \right]$$
$$c(t) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left[\frac{1}{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{-\left(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\omega_n t} - \frac{1}{\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{-\left(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\omega_n t} \right]$$

二次のシステムの応答

ステップ応答

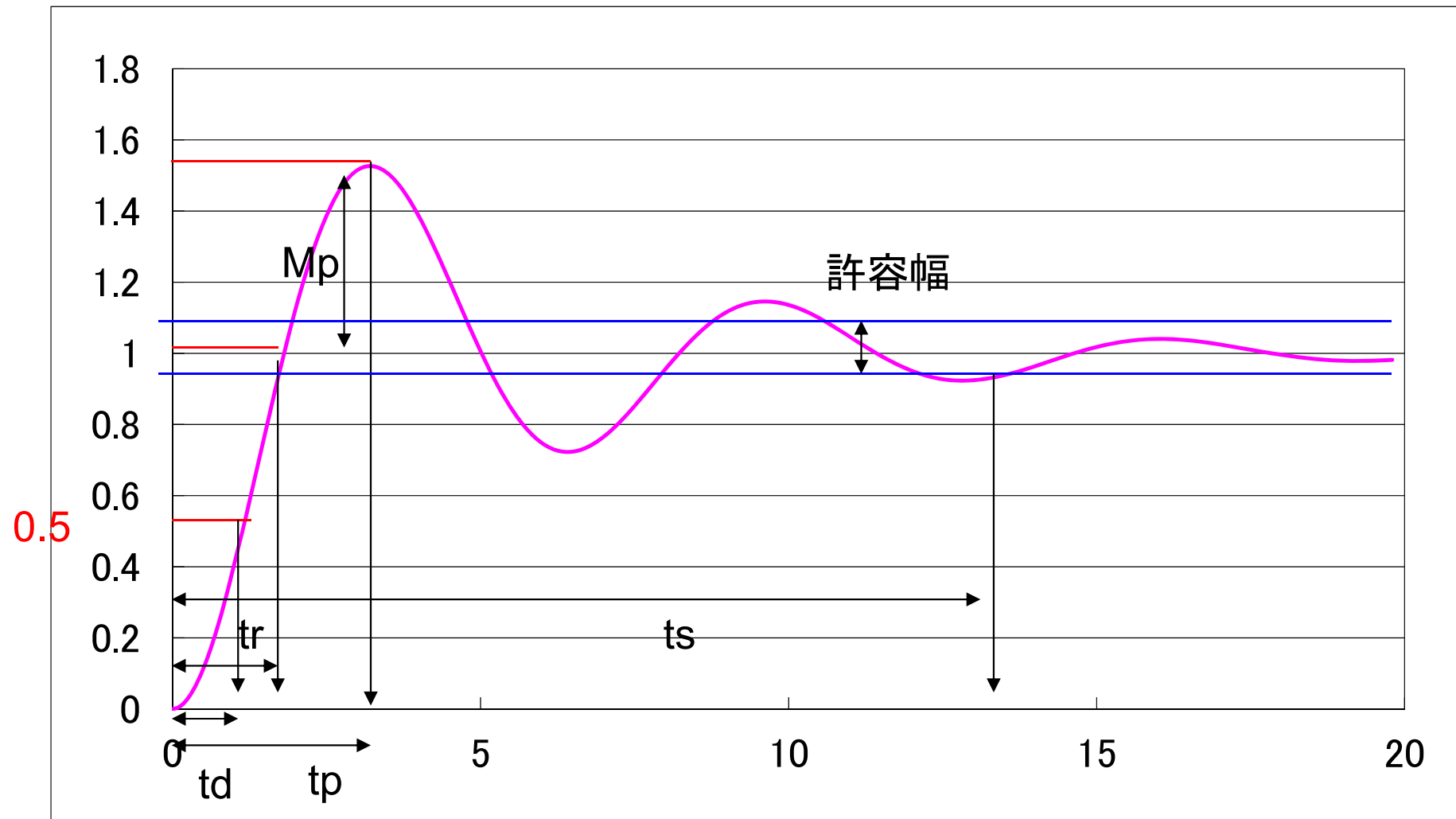


臨界制動($\zeta=1$)や過制動よりも, $0.5 < \zeta < 0.8$ (弱制動)の方が最終値に近づくのが早い

ステップ応答

- 単位ステップ入力に対する応答の評価基準
 - 遅延時間: t_d
 - 最終値の半分の値に至る時間
 - 立ち上がり時間: t_r
 - 10%→90%(過制動), 0%→100%(弱(不足)制動), 他5%→95%
 - ピーク時間: t_p (過制動には無い)
 - オーバershootにおける最初のピークの時間
 - 最大オーバershoot(行き過ぎ)量: $M_p(\%) = \frac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)} \times 100\%$
 - 過制動には無い
 - 相対的な安定性を示す
 - 整定時間: t_s
 - 最終値の2%または5%に値が収まる時間
 - 制御系の最も時定数の長いものに関する

ステップ応答



ステップ応答

立ち上がり時間: t_r の設計

- 二次のシステム $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$
- パラメータの決定:減衰比 ζ ,固有振動角周波数 ω_n
 - 0%→100%とする。
 - 単位ステップ入力に対する過渡応答の解析解: $c(t_r)=1$
(振動応答の場合最初の解)

$$c(t_r) = 1 = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t_r}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \left(\sqrt{1-\zeta^2} \cos \omega_d t_r + \zeta \sin \omega_d t_r \right)$$

ただし $\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$

$$\frac{e^{-\zeta\omega_n t_r}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \left(\sqrt{1-\zeta^2} \cos \omega_d t_r + \zeta \sin \omega_d t_r \right) = 0$$



ステップ応答

立ち上がり時間: t_r の設計

$$\frac{e^{-\zeta\omega_n t_r}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \neq 0 \quad \text{より} \quad \sqrt{1-\zeta^2} \cos \omega_d t_r + \zeta \sin \omega_d t_r = 0$$

$$\frac{\sin \omega_d t_r}{\cos \omega_d t_r} = \tan \omega_d t_r = \frac{-\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$$

$$\sigma = \zeta\omega_n, \omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} \quad \text{より}$$

$$\tan \omega_d t_r = \frac{-\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta\omega_n} = \frac{-\omega_d}{\sigma}$$

$$t_r = \frac{1}{\omega_d} \arctan \frac{-\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta\omega_n} = \frac{1}{\omega_d} \arctan \frac{-\omega_d}{\sigma}$$

- t_r を小さくするには ω_d を大きくすればよい

ステップ応答 行き過ぎ量の設計

- ピーク時間: t_p (M_p を求める) $\frac{d}{dt}c(t)=0$
- 過渡応答波形の極値を取る時間(時間微分=0)

$$c(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \left(\sqrt{1-\zeta^2} \cos \omega_d t + \zeta \sin \omega_d t \right)$$

$$\frac{d}{dt}c(t) = -\frac{-\zeta\omega_n e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \left(\sqrt{1-\zeta^2} \cos \omega_d t + \zeta \sin \omega_d t \right)$$

$$-\frac{-e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \left(-\omega_d \sqrt{1-\zeta^2} \sin \omega_d t + \omega_d \zeta \cos \omega_d t \right)$$

$$= -\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \left(\begin{array}{l} -\zeta\omega_d \cos \omega_d t - \omega_n \zeta^2 \sin \omega_d t \\ -\omega_n (1-\zeta^2) \sin \omega_d t + \omega_d \zeta \cos \omega_d t \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} \omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} \\ \text{を使う} \end{array}$$

ステップ応答 行き過ぎ量の設計

$$\frac{d}{dt}c(t) = \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \omega_n \sin \omega_d t$$
$$\left. \frac{dc}{dt} \right|_{t=t_p} = \frac{e^{-\zeta\omega_n t_p}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \omega_n \sin \omega_d t_p = 0$$

$$e^{-\zeta\omega_n t_p} \neq 0 \quad \sin \omega_d t_p = 0$$
$$\omega_d t_p = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$$

- 最初のピーク(弱制動)

$$\omega_d t_p = \pi \quad t_p = \frac{\pi}{\omega_d} \quad \text{減衰振動周期の半分に相当}$$

ステップ応答 行き過ぎ量の設計

- 最大オーバershoot量: M_p
 - ピーク時間 t_p にピーク値 $C(t_p)$ 発生

$$c(t_p) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t_p}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \left(\sqrt{1-\zeta^2} \cos \omega_d t_p + \zeta \sin \omega_d t_p \right)$$

$$c\left(\frac{\pi}{\omega_d}\right) = 1 - \frac{e^{-\frac{\zeta\omega_n\pi}{\omega_d}}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \left(\sqrt{1-\zeta^2} \cos \pi + \zeta \sin \pi \right)$$

$$= 1 + e^{-\frac{\zeta\omega_n\pi}{\omega_d}} = 1 + e^{-\frac{\zeta\omega_n\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}} = 1 + e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

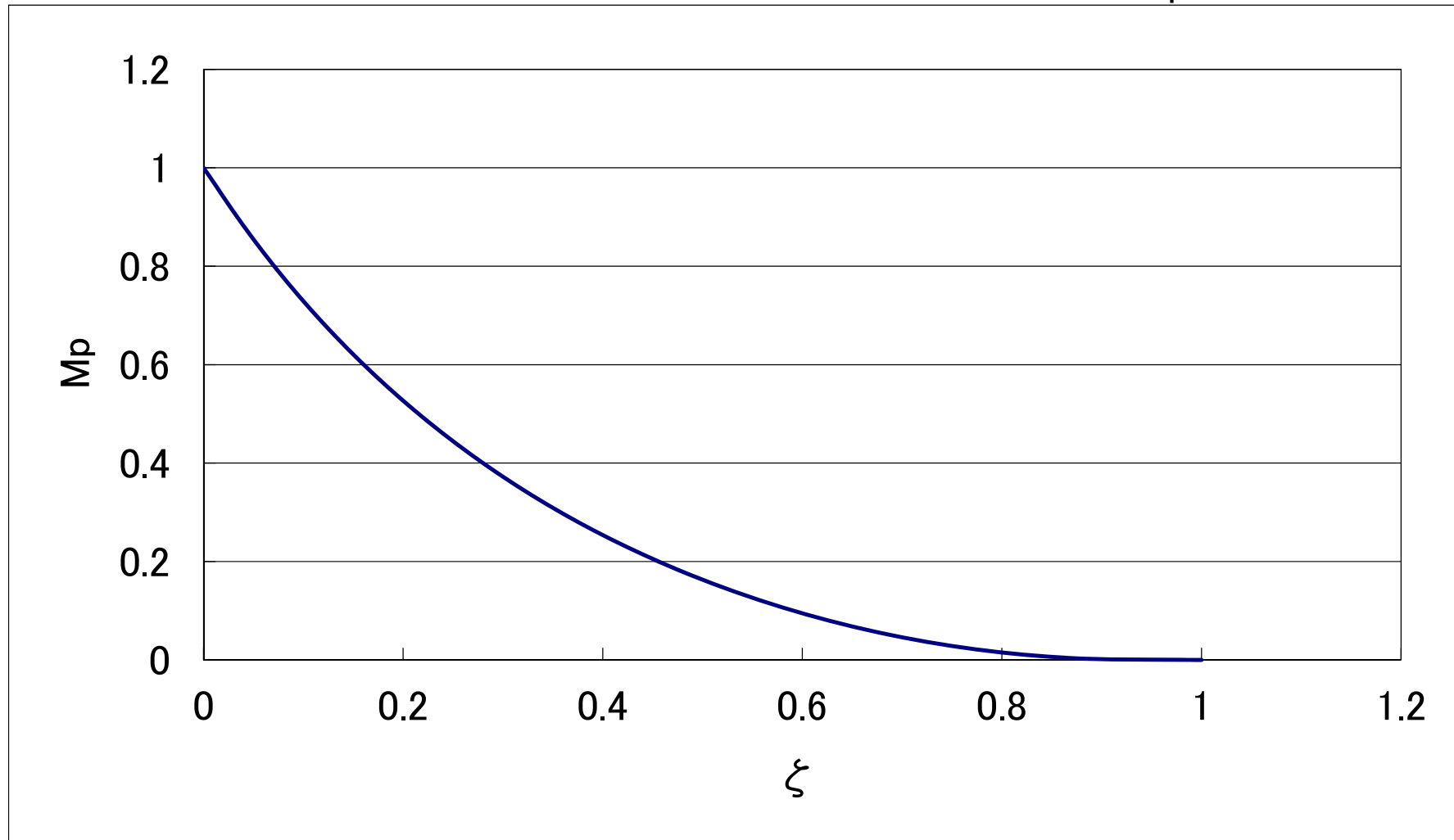
ただし
 $\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$

$$M_p = \frac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)} = \frac{1 + e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} - 1}{1} = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

ただし
 $c(\infty) = 1$

ステップ応答

減衰比 ζ と最大オーバーシュート量 M_p の関係



0.4 $<\zeta<$ 0.7ではオーバーシュートは25%から4%となる

ステップ応答

整定時間の設計

- 整定時間: t_s

- 弱制動時の過渡応答

$$c(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin\left(\omega_d t + \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)$$

- 単位ステップ入力に対する応答の包絡線

- 時定数 $T = \frac{1}{\zeta\omega_n} = \frac{1}{\sigma}$ σ : 減衰

$$1 \pm \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

- 与えられた ω_n に対して整定時間は減衰比 ζ の関数

- 時定数での近似

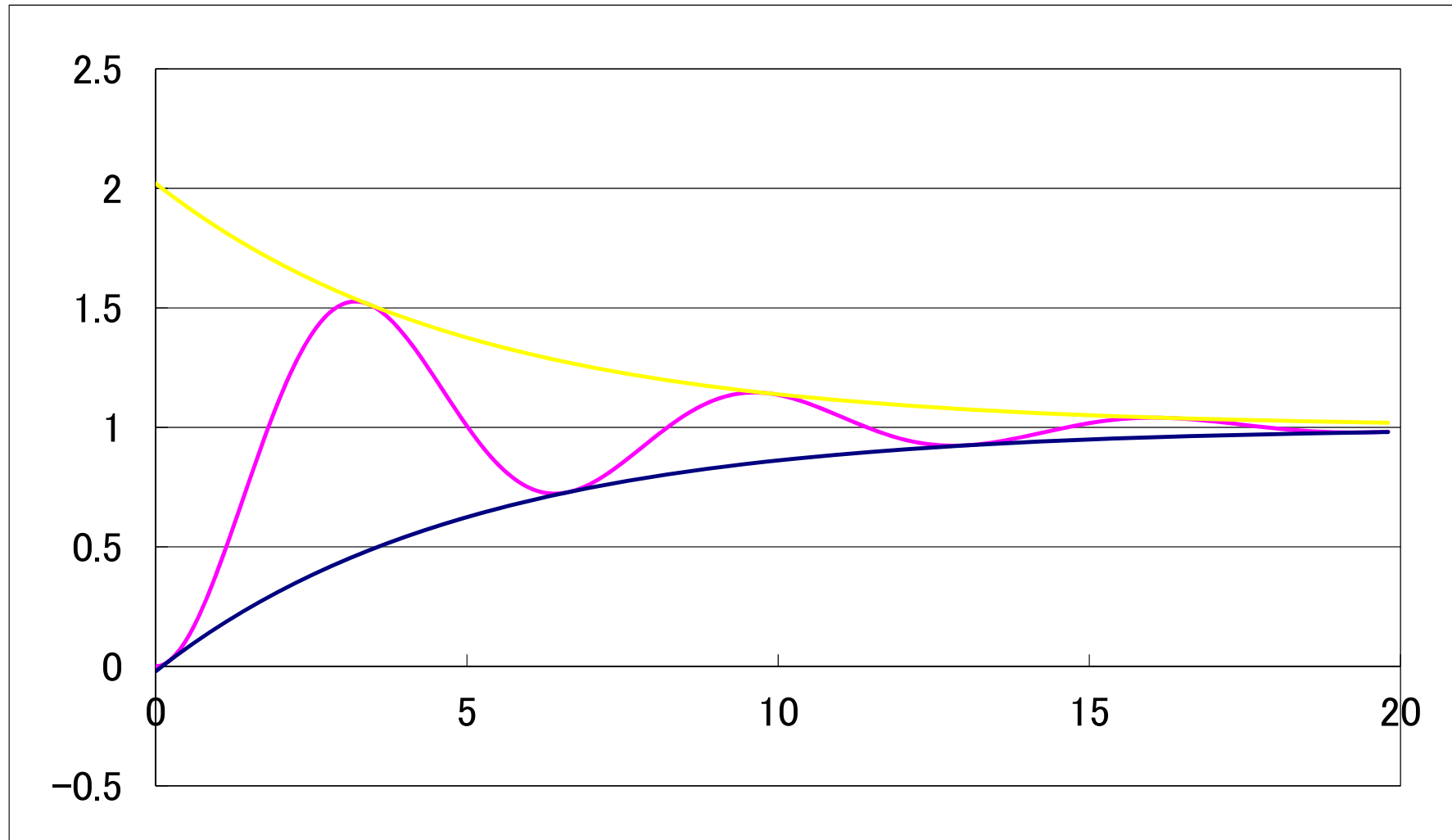
- $\pm 2\%$ 許容幅(時定数の4倍) $t_s = 4T = \frac{4}{\sigma} = \frac{4}{\zeta\omega_n}$

- $\pm 5\%$ 許容幅(時定数の3倍)

$$t_s = 3T = \frac{3}{\sigma} = \frac{3}{\zeta\omega_n}$$

ステップ応答

減衰振動と包絡線



二次のシステムのインパルス応答

- 二次のシステム $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$
- 単位インパルス入力: $r(t)$
 - ラプラス変換: $R(s) = 1$
 - 単位インパルス → 単位ステップの微分に相当
 - 過制動 ($\zeta > 1$) の応答

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{\omega_n^2}{\left[s + \omega_n(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\right] \left[s + \omega_n(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\right]}$$

二次のシステムのインパルス応答

過制動($\zeta > 1$)

部分分数分解

単なる計算なのでとばします

$$\begin{aligned} \left[s + \omega_n \left(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) \right] C(s) \Big|_{s = -\omega_n \left(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1} \right)} &= \frac{\omega_n^2}{-\omega_n \left(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) + \omega_n \left(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1} \right)} \\ &= \frac{\omega_n}{-2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left[s + \omega_n \left(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) \right] C(s) \Big|_{s = -\omega_n \left(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1} \right)} &= \frac{\omega_n^2}{-\omega_n \left(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) + \omega_n \left(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1} \right)} \\ &= \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \end{aligned}$$

二次のシステムのインパルス応答

過制動($\zeta > 1$)

部分分数分解の結果

$$C(s) = \frac{-\frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}}}{s + \omega_n(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})} + \frac{\frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}}}{s + \omega_n(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})}$$

$$c(t) = -\frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{-\omega_n(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})t} + \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{-\omega_n(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})t}$$

$$= \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left\{ e^{-\omega_n(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})t} - e^{-\omega_n(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})t} \right\}$$

$$0 < \omega_n(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}) < \omega_n(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})$$

$$\text{よ} \ddot{\text{り}} \quad e^{-\omega_n(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})t} - e^{-\omega_n(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})t} > 0 \quad \lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = 0$$

二次のシステムのインパルス応答

- 臨界制動($\zeta=1$) (重根)

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\omega_n s + \omega_n^2}$$
$$= \omega_n^2 \left(\frac{1}{s + \omega_n} \right)^2 \quad \text{重根}$$

$$c(t) = \omega_n^2 t e^{-\omega_n t}$$

$$\exp x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

より $c(t) > 0$ となる

$$\lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = 0$$

二次のシステムのインパルス応答

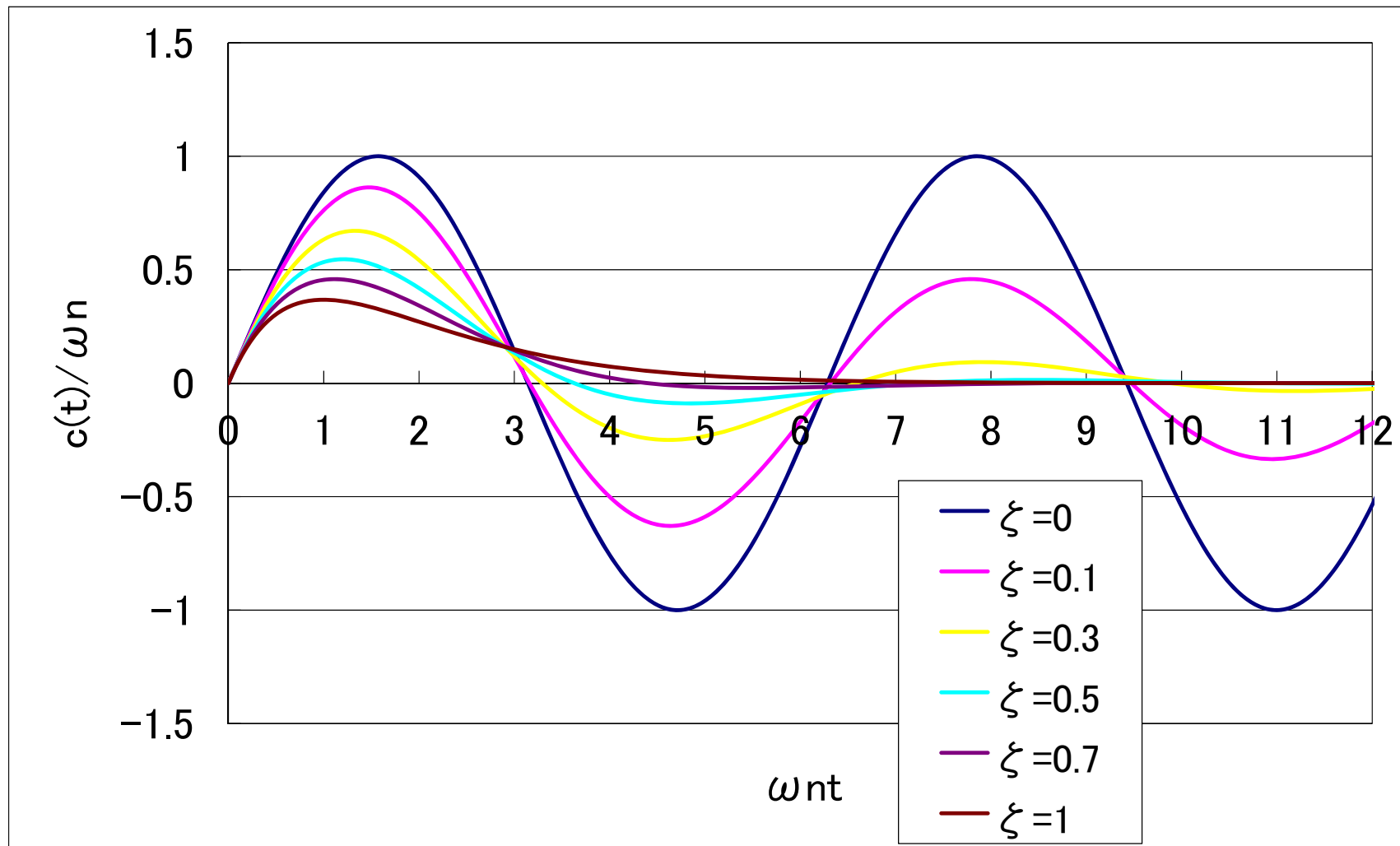
- 弱制動($0 \leq \zeta < 1$)

$$\begin{aligned} C(s) &= \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{\omega_n^2}{(s + \zeta\omega_n)^2 + (1 - \zeta^2)\omega_n^2} \\ &= \frac{\omega_n}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \frac{\sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + (1 - \zeta^2)\omega_n^2} \end{aligned}$$

$$c(t) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin \sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n t$$

弱制動では振動的となる(負値もとる) $\lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = 0$ ただし $\zeta \neq 0$

二次のシステムのインパルス応答



二次のシステムのインパルス応答

- 過制動・臨界制動時は $c(t)$ の符号は変化なし
 - ただしピーク値をとる
 - 極値をとる t_p

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}c(t) &= \frac{d}{dt} \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left\{ e^{-\omega_n(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})t} - e^{-\omega_n(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})t} \right\} \\ &= \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left\{ \begin{array}{l} -\omega_n(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})e^{-\omega_n(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})t} \\ +\omega_n(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})e^{-\omega_n(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})t} \end{array} \right\}\end{aligned}$$

二次のシステムのインパルス応答

$$\frac{d}{dt}c(t) = \frac{\omega_n^2}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left\{ \begin{array}{l} -(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})e^{-\omega_n(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})t} \\ +(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})e^{-\omega_n(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})t} \end{array} \right\} = 0$$

$$(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})e^{-\omega_n(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})t} = (\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})e^{-\omega_n(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})t}$$

$$\frac{\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}}{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}} = \frac{e^{-\omega_n(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})t}}{e^{-\omega_n(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})t}} = e^{-\omega_n(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1} - \zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})t} = e^{-2\omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}t}$$

$$-2\omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}t = \log \frac{\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}}{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}}$$

二次のシステムのインパルス応答

$$t_p = -\frac{1}{2\omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}} \log \frac{\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}}{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}}$$

$$c(t_p) = \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left\{ \begin{array}{l} e^{\omega_n (\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}) \frac{1}{2\omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}} \log \frac{\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}}{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}}} \\ - e^{\omega_n (\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}) \frac{1}{2\omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}} \log \frac{\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}}{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}}} \end{array} \right\}$$

二次のシステムのインパルス応答

- 臨界制動

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}c(t) &= \frac{d}{dt}\omega_n^2 t e^{-\omega_n t} \\ &= \omega_n^2 \left\{ e^{-\omega_n t} - t\omega_n e^{-\omega_n t} \right\} \\ &= \omega_n^2 e^{-\omega_n t} \{1 - t\omega_n\} = 0\end{aligned}$$

$$t_p = \frac{1}{\omega_n}$$

$$\begin{aligned}c(t_p) &= \omega_n^2 \frac{1}{\omega_n} e^{-\omega_n \frac{1}{\omega_n}} \\ &= \omega_n e^{-1}\end{aligned}$$

二次のシステムのインパルス応答

- 弱制動
 - 極値をとる t_p

$$\frac{d}{dt}c(t) = \frac{d}{dt} \left[\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin \sqrt{1-\zeta^2} \omega_n t \right]$$
$$= 0$$

$$\frac{d}{dt}c(t) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} \left[\begin{array}{l} -\zeta\omega_n e^{-\zeta\omega_n t} \sin \sqrt{1-\zeta^2} \omega_n t \\ + \sqrt{1-\zeta^2} \omega_n e^{-\zeta\omega_n t} \cos \sqrt{1-\zeta^2} \omega_n t \end{array} \right]$$

つづく

二次のシステムのインパルス応答

弱制動

$$\frac{d}{dt}c(t) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} \omega_n e^{-\zeta\omega_n t} \left[\begin{array}{l} -\zeta \sin \sqrt{1-\zeta^2} \omega_n t \\ + \sqrt{1-\zeta^2} \cos \sqrt{1-\zeta^2} \omega_n t \end{array} \right] = 0$$

$$-\zeta \sin \sqrt{1-\zeta^2} \omega_n t + \sqrt{1-\zeta^2} \cos \sqrt{1-\zeta^2} \omega_n t = 0$$

$$\zeta \sin \sqrt{1-\zeta^2} \omega_n t = \sqrt{1-\zeta^2} \cos \sqrt{1-\zeta^2} \omega_n t$$

$$\frac{\sin \sqrt{1-\zeta^2} \omega_n t}{\cos \sqrt{1-\zeta^2} \omega_n t} = \tan \sqrt{1-\zeta^2} \omega_n t = \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$$

二次のシステムのインパルス応答

- 極値をとる時間 t_p

$$\sqrt{1-\zeta^2} \omega_n t = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$$

$$t_p = \frac{\tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}}{\sqrt{1-\zeta^2} \omega_n}$$

二次のシステムのインパルス応答

- 最大値 $M_p = (t_p)$

$$\begin{aligned}
 c \left(\frac{\tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}}{\sqrt{1-\zeta^2} \omega_n} \right) &= \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta \omega_n \frac{\tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}}{\sqrt{1-\zeta^2} \omega_n}} \sin \left[\sqrt{1-\zeta^2} \omega_n \frac{\tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}}{\sqrt{1-\zeta^2} \omega_n} \right] \\
 &= \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}} \sin \left[\tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \right] \\
 &= \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}} \sin \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{1-\zeta^2 + \zeta^2}
 \end{aligned}$$

二次のシステムのインパルス応答

- 最大オーバシュート量

$$c \left(\frac{\tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}}{\sqrt{1-\zeta^2} \omega_n} \right) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}} \sin \sqrt{1-\zeta^2}$$