数値解析
第八回　固有値
ハウスホルダー変換②

舟木　剛

平成29年11月29日２限

シラバス

- 授業の目的
  - 工学分野でよく用いられる数値計算の算法ならびにそれらの数値的な特性について理解させる.
- 授業計画
  - 数値計算と誤差（1回）
    - 数値計算の必要性ならびに誤差の種類について説明するとともに，行列式とその性質，行及び列の交換などの基本演算，逆行列の定義と求め方について説明する.
  - 代数方程式（2回）
    - ２分法，Newton-Raphson 法，Bailey 法について解説する．また，多変数に対するNewton-Raphson 法と収束に関する留意点について述べる.
  - 連立方程式（３回）
    - Gauss の消去法，Gauss-Jordan の掃き出し法，LU 分解法の手順ならびに計算複雑度について解説する．また，Jacobi 法，Gauss-Seidel 法，SOR 法などの反復法について手順並びに収束条件について解説する.
  - 行列の固有値（３回）
    - 固有値の性質，べき乗法，Householder 法，QR 法について述べる．QR 法の収束定理について解説する.
  - 補間法（２回）
    - 線形補間，Lagrange 補間，Newton 補間，スプライン補間について述べる．多項式補間については算出方法をスプライン補間については3次のスプライン関数の導出方法を説明する．また，自然なスプライン関数とその特徴について解説する.
  - 関数近似（１回）
    - 最小2乗法による関数の近似について解説する.
  - 数値積分（１回）
    - 台形公式，シンプソンの公式による数値積分について解説する.
  - 常微分方程式（1回）
    - 単区分法である Euler 法，修正Euler 法，Runge-Kutta 法ならびに複区分法である Adams-Moulton の予測子・修正子法について解説する．また，数値不安定性についても解説する.
- 教科書 佐藤・中村共著「よくわかる数値計算」日刊工業新聞社

ハウスホルダー法による固有値求解

- 実対称行列Aの固有値と固有ベクトル
  - 実対称行列の三重対角行列化
    - 相似変換
      - ハウスホルダー変換の適用　今回
  - 三重対角行列の固有値・固有ベクトルの求解
    - 前回

三重対角行列の固有ベクトル

- 行列Aと固有値λ，固有ベクトルXの関係
  - $AX = \lambda X$
  - $$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & & 0 \\ b_1 & a_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ 0 & & b_{n-1} & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} a_1 - \lambda & b_1 & & 0 \\ b_1 & a_2 - \lambda & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ 0 & & b_{n-1} & a_n - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = 0$$

- 固有ベクトルの大きさは任意なので$x_1 = 1$とおく
  - $(a_1 - \lambda)x_1 + b_1 x_2 = 0$ $\rightarrow x_2 = \frac{1}{b_1}(\lambda - a_1)x_1$
  - $b_1 x_1 + (a_2 - \lambda)x_2 + b_2 x_3 = 0$ $\rightarrow x_3 = \frac{1}{b_2}\{(\lambda - a_2)x_2 - b_1 x_1\}$
  - $b_2 x_2 + (a_3 - \lambda)x_3 + b_3 x_4 = 0$ $\rightarrow x_4 = \frac{1}{b_3}\{(\lambda - a_3)x_3 - b_2 x_2\}$
  - $b_{i-2} x_{i-2} + (a_{i-1} - \lambda)x_{i-1} + b_{i-1} x_i = 0$ $\rightarrow x_i = \frac{1}{b_{i-1}}\{(\lambda - a_{i-1})x_{i-1} - b_{i-2} x_{i-2}\}\ (i = 3, \cdots, n)$
  - 順番に求まる

三重対角行列の固有値
$b_i = 0$となる項がある場合

- 三重対角行列Aに$b_i = 0$となる項がある場合
  - $$\left[\begin{array}{cccc|cccc}
a_1 & b_1 & 0 & & & \cdots & & 0 \\
b_1 & a_2 & \ddots & & & & & \\
0 & \ddots & \ddots & b_{i-1} & & & & \\
 & & b_{i-1} & a_i & 0 & & & \vdots \\
\hline
 & & & 0 & a_{i+1} & \ddots & 0 & \\
\vdots & & & & \ddots & \ddots & b_{n-1} & 0 \\
 & & & & & b_{n-1} & a_{n-1} & b_{n-1} \\
0 & & \cdots & & & 0 & b_{n-1} & a_n
\end{array}\right]$$
  - 行列式$|A - \lambda I| =$ $$\left|\begin{array}{cccc|cccc}
a_1-\lambda & b_1 & 0 & & & \cdots & & 0 \\
b_1 & a_2-\lambda & \ddots & & & & & \\
0 & \ddots & \ddots & b_{i-1} & & & & \\
 & & b_{i-1} & a_i-\lambda & 0 & & & \vdots \\
\hline
 & & & 0 & a_{i+1}-\lambda & \ddots & 0 & \\
\vdots & & & & \ddots & \ddots & b_{n-1} & 0 \\
 & & & & & b_{n-1} & a_{n-1}-\lambda & b_{n-1} \\
0 & & \cdots & & & 0 & b_{n-1} & a_n-\lambda
\end{array}\right|$$

三重対角行列の固有値 $b_i = 0$となる項がある場合

- 行列式の性質

$$|A| = \begin{vmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{vmatrix} = |A_1||A_2|$$

$$\begin{vmatrix}
a_1-\lambda & b_1 & 0 & & & \cdots & & 0 \\
b_1 & a_2-\lambda & \ddots & & & & & \\
0 & \ddots & \ddots & b_{i-1} & & & & \\
 & & b_{i-1} & a_i-\lambda & 0 & & & \vdots \\
 & & & 0 & a_{i+1}-\lambda & \ddots & 0 & \\
\vdots & & & & \ddots & \ddots & b_{n-1} & 0 \\
 & & & & & b_{n-1} & a_{n-1}-\lambda & b_{n-1} \\
0 & & \cdots & & & 0 & b_{n-1} & a_n-\lambda
\end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix}
a_1-\lambda & b_1 & & 0 \\
b_1 & a_2-\lambda & \ddots & \\
 & \ddots & \ddots & b_{i-1} \\
0 & & b_{i-1} & a_i-\lambda
\end{vmatrix}
\begin{vmatrix}
a_{i+1}-\lambda & b_{i+1} & & 0 \\
b_{i+1} & a_{i+2}-\lambda & \ddots & \\
 & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\
0 & & b_{n-1} & a_n-\lambda
\end{vmatrix}$$

三重対角行列の固有値
$b_i = 0$となる項がある場合

- $$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & 0 & & & \cdots & & 0 \\ b_1 & a_2 & \ddots & & & & & \\ 0 & \ddots & \ddots & b_{i-1} & & & & \\ & & b_{i-1} & a_i & 0 & & & \vdots \\ & & & 0 & a_{i+1} & \ddots & 0 & \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & b_{n-1} & 0 \\ & & & & & b_{n-1} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & & \cdots & & & 0 & b_{n-1} & a_n \end{bmatrix}$$

  の固有値は

  $$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & & 0 \\ b_1 & a_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b_{i-1} \\ 0 & & b_{i-1} & a_i \end{bmatrix} と \begin{bmatrix} a_{i+1} & b_{i+1} & & 0 \\ b_{i+1} & a_{i+2} & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ 0 & & b_{n-1} & a_n \end{bmatrix}$$

  の固有値となる

行列の相似変換の性質

- 正則なn次正方行列P
  - $PX = PA = I$となるXが存在
- 正則行列Pによる行列Aの相似変換
  - $B = P^{-1}AP$
- 相似変換した行列Bの固有値λは不変
  - $\det(B - \lambda I) = \det(A - \lambda I)$

ハウスホルダー（相似）変換による実対称行列の三重対角化

- 逐次的処理で三重対角化を行う
  - $A_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$
  - $A_2 = {B_2}^{-1} A_1 B_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & & \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & & \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{43} & 0 & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \\ 0 & a_{n2} & \cdots & & & a_{nn} \end{bmatrix}$
  - $A_{n-2} = {B_{n-2}}^{-1} A_{n-3} B_{n-2} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & & \cdots & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & & & & \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & & & & \\ \vdots & 0 & a_{44} & a_{44} & \ddots & & & \vdots \\ & & & a_{54} & \ddots & \ddots & 0 & \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & a_{n-2,n-1} & 0 \\ & & & & & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & & \cdots & & & 0 & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{bmatrix}$

相似変換を用いて
逐次0要素にする

ハウスホルダー（相似）変換による実対称行列の三重対角化

- 相似変換行列Bを直交行列とする
  - $B^{-1} = B^T$
- n次列ベクトルUを考える$U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$
  - ただし，$U^T U = {u_1}^2 + {u_2}^2 + \cdots + {u_n}^2 = 1$
  - UU^Tは対称行列

$$UU^T = \begin{bmatrix} {u_1}^2 & u_1 u_2 & \cdots & u_1 u_n \\ u_2 u_1 & {u_2}^2 & & u_2 u_n \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ u_n u_1 & u_n u_2 & \cdots & {u_n}^2 \end{bmatrix}$$

ハウスホルダー（相似）変換による実対称行列の三重対角化

- 相似変換行列Bをn次元列ベクトルUで構成する
  - $B = I - 2UU^T$
    - UU^Tは対称なので$B = B^T$となる
    - Bは直交行列なので$B^{-1} = B^T$となる
    - 結局$B = B^{-1} = B^T$となる
  - 行列Aの相似変換
    - $A' = B^{-1}AB = BAB$

ハウスホルダー（相似）変換行列

- 次式を満たす相似変換行列Bを求める
  - $AB = \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21}' & a_{22}' & a_{23}' & \cdots & a'_{2n} \\ a_{31}' & a_{32}' & a_{33}' & \cdots & a'_{3n} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ a_{n1}' & a_{n2}' & a_{n3}' & \cdots & a'_{nn} \end{bmatrix}$
    - $B^{-1}AB$はあとで
    - $B = I - 2UU^T, U = \begin{bmatrix} 0 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$となる$U$を求める
      - ただし，$U^T U = {u_2}^2 + \cdots + {u_n}^2 = 1$とする

ハウスホルダー(相似)変換行列

- $AB = A(I - 2UU^T) = A - 2AUU^T$
  - $P = AU = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix}$とする

0になる

  - $AB = A - 2PU^T = A - 2\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix}[0, u_2, \cdots, u_n]$

この行はP1のみ使用

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} - 2p_1u_2 & a_{13} - 2p_1u_3 & \cdots & a_{1n} - 2p_1u_n \\ a_{21} & a_{22} - 2p_2u_2 & a_{23} - 2p_2u_3 & \cdots & a_{2n} - 2p_2u_n \\ a_{31} & a_{32} - 2p_3u_2 & a_{33} - 2p_3u_3 & \cdots & a_{3n} - 2p_3u_n \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} - 2p_nu_2 & a_{33} - 2p_nu_3 & \cdots & a_{nn} - 2p_nu_n \end{bmatrix}$$

- ここで$a_{1i} - 2p_1u_i = 0 \ \ (i = 3,4,\cdots,n)$

$$a_{1i} = 2p_1u_i$$

ハウスホルダー（相似）変換行列

まずp_1を求めてからp_2を求める

- $(AB)(AB)^T = (AB)\left(B^T A^T\right) = (AB)\left(B^{-1} A^T\right) = AA^T$ について考える
  - p_1を求める
  - $(AB)(AB)^T =$
    $$\begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ {a_{21}}' & {a_{22}}' & {a_{23}}' & \cdots & a'_{2n} \\ {a_{31}}' & {a_{32}}' & {a_{33}}' & \cdots & a'_{3n} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ {a_{n1}}' & {a_{n2}}' & {a_{n3}}' & \cdots & a'_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{21} & a'_{31} & \cdots & a'_{n1} \\ a'_{12} & {a_{22}}' & {a_{32}}' & \cdots & a'_{n2} \\ 0 & {a_{23}}' & {a_{33}}' & \cdots & a'_{n3} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & {a_{2n}}' & {a_{3n}}' & \cdots & a'_{nn} \end{bmatrix}$$
    - 1行1列目要素${a'_{11}}^2 + {a'_{12}}^2 = {a_{11}}^2 + (a_{12} - 2p_1 u_2)^2$
  - AA^T
    - 1行1列目要素${a_{11}}^2 + {a_{12}}^2 + \cdots + {a_{1n}}^2$

ハウスホルダー(相似)変換行列

- $(AB)(AB)^T \ = AA^T$
  - 1行1列目要素の比較
    - ${a_{11}}^2 + (a_{12} - 2p_1u_2)^2 = {a_{11}}^2 + {a_{12}}^2 + \cdots + {a_{1n}}^2$
    - $(a_{12} - 2p_1u_2)^2 = {a_{12}}^2 + \cdots + {a_{1n}}^2$
- $a_{1i} - 2p_1u_i = 0 \ \ (i = 3,4,\cdots,n)$より
  - $a_{1i} = 2p_1u_i$を${a_{12}}^2 + \cdots + {a_{1n}}^2$に適用
    - ${a_{12}}^2 + \cdots + {a_{1n}}^2 = {a_{12}}^2 + \sum_{i=3}^{n} {a_{1\mathrm{i}}}^2$

$$= {a_{12}}^2 + \sum_{i=3}^{n} (2p_1u_i)^2 = {a_{12}}^2 + 4{p_1}^2 \sum_{i=3}^{n} {u_i}^2$$

ハウスホルダー（相似）変換行列

- ここで$u_2{}^2 + \cdots + u_n{}^2 = \sum_{i=2}^{n} u_i{}^2 = 1$より
  - $\sum_{i=3}^{n} u_i{}^2 = 1 - u_2{}^2$を用いて
    - $a_{12}{}^2 + \cdots + a_{1n}{}^2 = a_{12}{}^2 + 4p_1{}^2(1 - u_2{}^2)$
- $(a_{12} - 2p_1u_2)^2 = a_{12}{}^2 + \cdots + a_{1n}{}^2$より
  - $a_{12}{}^2 - 4a_{12}p_1u_2 + 4p_1{}^2u_2{}^2 = a_{12}{}^2 + 4p_1{}^2(1 - u_2{}^2)$
  - $-4a_{12}p_1u_2 + 4p_1{}^2u_2{}^2 = 4p_1{}^2(1 - u_2{}^2)$
  - $p_1 \neq 0$より$-a_{12}u_2 + p_1u_2{}^2 = p_1(1 - u_2{}^2)$
    - $-a_{12}u_2 = p_1\left(1 - 2u_2{}^2\right)$
    - $p_1 = \frac{a_{12}u_2}{2u_2{}^2 - 1}$

ハウスホルダー（相似）変換行列

u_2を求める

- $(a_{12} - 2p_1 u_2)^2 = \sum_{i=2}^{n} a_{1\mathrm{i}}{}^2$をもちいて
  - $\sum_{i=2}^{n} a_{1\mathrm{i}}{}^2 = (a_{12} - 2p_1 u_2)^2 = \left(a_{12} - 2\frac{a_{12}u_2}{2{u_2}^2-1}u_2\right)^2 = {a_{12}}^2\left(\frac{2{u_2}^2-1-2{u_2}^2}{2{u_2}^2-1}\right)^2 = \left(\frac{a_{12}}{2{u_2}^2-1}\right)^2$
  - $\left(2{u_2}^2 - 1\right)^2 = \frac{{a_{12}}^2}{\sum_{i=2}^{n} a_{1\mathrm{i}}{}^2}$
  - $2{u_2}^2 - 1 = \pm\frac{a_{12}}{\sqrt{\sum_{i=2}^{n} a_{1\mathrm{i}}{}^2}}$
  - ${u_2}^2 = \frac{1}{2}\left\{1 \pm \frac{a_{12}}{\sqrt{\sum_{i=2}^{n} a_{1\mathrm{i}}{}^2}}\right\}$
  - $u_2 = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\left\{1 \pm \frac{a_{12}}{\sqrt{\sum_{i=2}^{n} a_{1\mathrm{i}}{}^2}}\right\}}$　→これを$p_1 = \frac{a_{12}u_2}{2{u_2}^2-1}$に代入

ハウスホルダー(相似)変換行列

- $p_1 = \frac{a_{12}u_2}{2{u_2}^2-1} = \frac{\pm a_{12}\sqrt{\frac{1}{2}\left\{1\pm\frac{a_{12}}{\sqrt{\sum_{i=2}^{n} {a_{1\mathrm{i}}}^2}}\right\}}}{2\frac{1}{2}\left\{1\pm\frac{a_{12}}{\sqrt{\sum_{i=2}^{n} {a_{1\mathrm{i}}}^2}}\right\}-1} = \frac{\pm a_{12}\sqrt{\frac{1}{2}\left\{1\pm\frac{a_{12}}{\sqrt{\sum_{i=2}^{n} {a_{1\mathrm{i}}}^2}}\right\}}}{\pm\frac{a_{12}}{\sqrt{\sum_{i=2}^{n} {a_{1\mathrm{i}}}^2}}} =$

$$\pm\sqrt{\sum_{i=2}^{n} {a_{1\mathrm{i}}}^2}\sqrt{\frac{1}{2}\left\{1\pm\frac{a_{12}}{\sqrt{\sum_{i=2}^{n} {a_{1\mathrm{i}}}^2}}\right\}}$$

$$=\pm\sqrt{\frac{\sum_{i=2}^{n} {a_{1\mathrm{i}}}^2 \pm a_{12}\sqrt{\sum_{i=2}^{n} {a_{1\mathrm{i}}}^2}}{2}}$$

u_iを求める

- $a_{1i} - 2p_1u_i = 0 \ \ (i = 3,4,\cdots,n)$より
  - $u_i = \frac{a_{1i}}{2p_1} = \frac{a_{1i}}{2\frac{a_{12}u_2}{2{u_2}^2-1}} = \frac{a_{1i}\left(2{u_2}^2-1\right)}{2a_{12}u_2} \ (i = 3,4,\cdots,n)$

三重対角行列化

ABの結果を用いて$B^{-1}AB$を求める

- $A' = B^{-1}AB = BAB$
$$= (I - 2UU^T)A(I - 2UU^T)$$
$$= (A - 2UU^T A)(I - 2UU^T)$$
$$= A - 2UU^T A - 2AUU^T + 4UU^T AUU^T$$
  - $P = AU$,$A = A^T$より$U^T A = U^T A^T = (AU)^T = P^T$
  - $A' = A - 2UP^T - 2PU^T + 4UU^T AUU^T$
  - $U = \begin{bmatrix} 0 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$より$UU^T = \begin{bmatrix} 0 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}[0, u_2, \cdots, u_n] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & {u_2}^2 & & u_2 u_n \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & u_n u_2 & \cdots & {u_n}^2 \end{bmatrix}$
    - $UU^T AUU^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & {a_{22}}'' & & {a_{2n}}'' \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & {a_{n2}}'' & \cdots & {a_{nn}}'' \end{bmatrix}$ 第4項

三重対角行列化

- $PU^T = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix} [0, u_2, \cdots, u_n]$

$$= \begin{bmatrix} 0 & p_1 u_2 & p_1 u_3 & \cdots & p_1 u_n \\ 0 & p_2 u_2 & p_2 u_3 & \cdots & p_2 u_n \\ 0 & p_3 u_2 & p_3 u_3 & \cdots & p_3 u_n \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & p_n u_2 & p_n u_3 & \cdots & p_n u_n \end{bmatrix}$$

第3項

- ここで$a_{1i} - 2p_1 u_i = 0 \;\; (i = 3,4, \cdots, n)$

三重対角行列化

- $UP^T = \begin{bmatrix} 0 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} [p_1, p_2, \cdots, p_n]$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ p_1u_2 & p_2u_2 & p_3u_2 & \cdots & p_nu_2 \\ p_1u_3 & p_2u_3 & p_3u_3 & \cdots & p_nu_3 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ p_1u_n & p_2u_n & p_3u_n & \cdots & p_nu_n \end{bmatrix}$$

第2項

  - Aは対称行列なので，$a_{i1} = a_{1i}$
    - $a_{i1} - 2p_1u_i = a_{1i} - 2p_1u_i = 0 \ (i = 3,4,\cdots,n)$

三重対角行列化

- $A' = B^{-1}AB = A - 2UU^TA - 2AUU^T + 4UU^TAUU^T$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}{}' & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21}{}' & a_{22}{}' & a_{23}{}' & \cdots & a_{2n}{}' \\ 0 & a_{32}{}' & a_{33}{}' & \cdots & a_{3n}{}' \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2}{}' & a_{n3}{}' & \cdots & a_{nn}{}' \end{bmatrix}$$

  - $a'_{1i} = a_{1i} - 2p_1u_i = 0 \quad (i = 3, \cdots, n)$ 1行目の3列目以降が0
  - $a_{i1}{}' = a_{i1} - 2p_1u_i = 0 \ (i = 3, \cdots, n)$ 1列目の3行目以降が0
- 繰り返しにより三重対角化できる
  - 固有値を求めることができる(先週に戻る)