

回路とシステム
第三回
ラプラス変換による回路解析

舟木 剛

平成30年10月22日2限

講義計画

- 回路方程式 1回 ※回路理論 I 3章
 - 節点方程式と閉路方程式
- ラプラス変換による回路解析 1回 ※回路理論 II 3章
- 線形回路の応答 2回 ※回路理論 II 4章
 - 零入力応答(重ね合わせの理、零入力応答の時間応答、漸近安定性)
 - 零状態応答(伝達関数、重ね合わせの理、インパルス応答と合成積、安定伝達関数、周波数応答)
- 1ポート回路 3回 ※回路理論 II 5章
 - テブナン・ノートンの定理
 - 安定性と正実性(開放安定性、短絡安定性、正実関数)
- 2ポート回路 4回 ※回路理論 II 6章・8章
 - 2ポート回路の行列表現
 - 相反2ポート回路
 - 相互接続
 - 分布定数回路の等価回路(T形等価回路、 π 形等価回路)
- 状態方程式による回路解析 2回 ※回路理論 II 7章
 - 状態方程式の導出(状態変数、状態方程式、出力方程式)
 - 状態方程式の解(零入力応答、零状態応答)
- 三相交流 1回
 - 平衡三相回路

- 結合インダクタ(変圧器)

- 自己インダクタンス L_1, L_2
- 相互インダクタンス M
- 時間領域

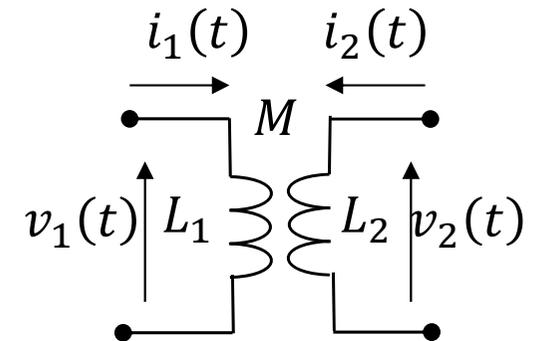
- $v_1(t) = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + M \frac{di_2(t)}{dt}$

- $v_2(t) = L_2 \frac{di_2(t)}{dt} + M \frac{di_1(t)}{dt}$

- 複素領域

- $V_1(s) = sL_1 I_1(s) + sM I_2(s) - (L_1 i_1(0^-) + M i_2(0^-))$

- $V_2(s) = sL_2 I_2(s) + sM I_1(s) - (L_2 i_2(0^-) + M i_1(0^-))$



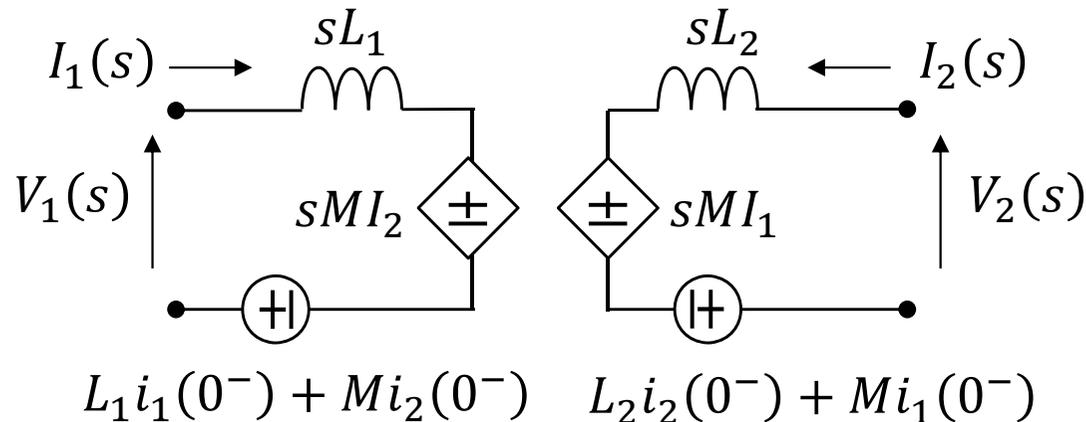
ラプラス変換による回路解析

- 行列表現

- $L = \begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix}, V(s) = \begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix}, I(s) = \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} i(0^-) = \begin{bmatrix} i_1(0^-) \\ i_2(0^-) \end{bmatrix}$

- $V(s) = sLI(s) - Li(0^-)$

- L が正則であればアドミタンス表現可能



ラプラス変換による回路解析

- スイッチ

- 閉スイッチ $t = 0$ でオン

- 時間領域

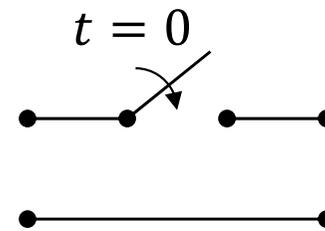
- $v(t) = \text{有限の値}$ $t < 0$

- $v(t) = 0$ $t > 0$

- 複素領域

- $V(s) = \int_{-\infty}^{\infty} v(t)e^{-st} dt = \int_{0^-}^{0^+} v(t) dt = 0$

- s 領域では短絡枝



ラプラス変換による回路解析

- スイッチ

- 開スイッチ $t = 0$ でオフ

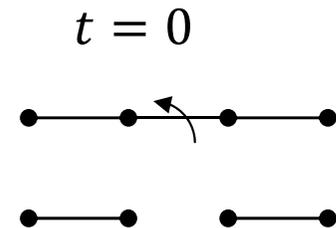
- 時間領域

- $i(t) = \text{有限の値}$ $t < 0$

- $i(t) = 0$ $t > 0$

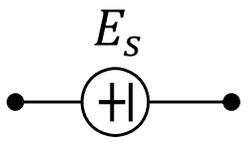
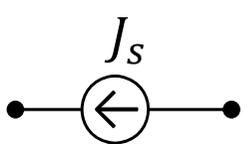
- 複素領域

- $I(s) = \int_{-0}^{\infty} i(t)e^{-st} dt = \int_{0^-}^{0^+} i(t) dt = 0$



ラプラス変換による回路解析

- 電源

- 電圧源 $e_s(t)$ $\mathcal{L}[e_s(t)] = E_s(s) = \frac{E}{s}$ 
- 電流源 $j_s(t)$ $\mathcal{L}[j_s(t)] = J_s(s) = \frac{J}{s}$ 

- 線形時不変の素子で構成される回路網

- 領域では電源を含む抵抗回路網の解析になる

- 初期値が0の場合

- $V(s) = Z(s)I(s)$ $Z(s) = R, sL, \frac{1}{sC}$
- $I(s) = Y(s)V(s)$ $Y(s) = \frac{1}{R}, \frac{1}{sK}, sC$

ラプラス変換による回路解析例

- RC回路の $t > 0$ における応答

- 節点方程式

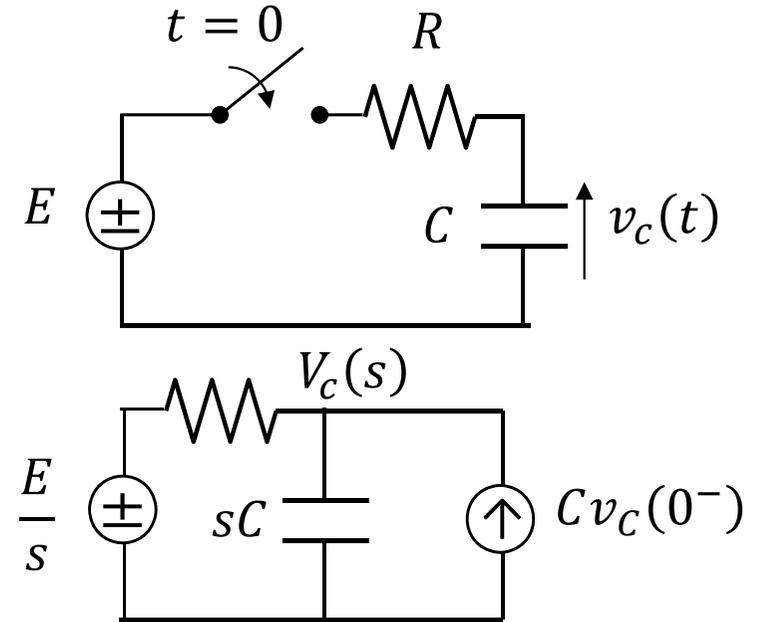
- $\frac{\frac{E}{s} - V_C(s)}{R} = sCV_C(s) - Cv_C(0^-)$

- $V_C(s) \left\{ sC + \frac{1}{R} \right\} = \frac{E}{s} + Cv_C(0^-)$

- $V_C(s) = \frac{\frac{E}{sR} + Cv_C(0^-)}{sC + \frac{1}{R}} = \frac{E + sCRv_C(0^-)}{s(sCR + 1)} = \frac{E}{s} + \frac{v_C(0^-) - E}{s + \frac{1}{CR}}$

- 時間応答

- $v_C(t) = E + [v_C(0^-) - E]e^{-\frac{t}{CR}}$



結合インダクタ(トランス)回路

- スイッチ → 初期値0

- KVL

- $(sL_1 + R_1)I_1(s) + sMI_2(s) = \frac{E}{s^2}$

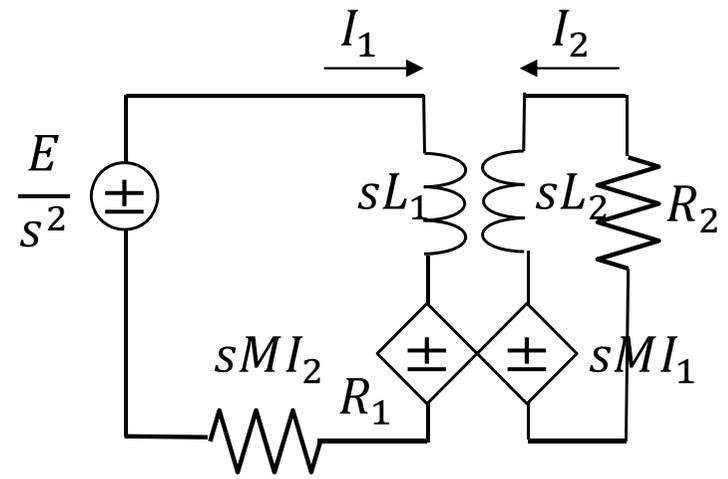
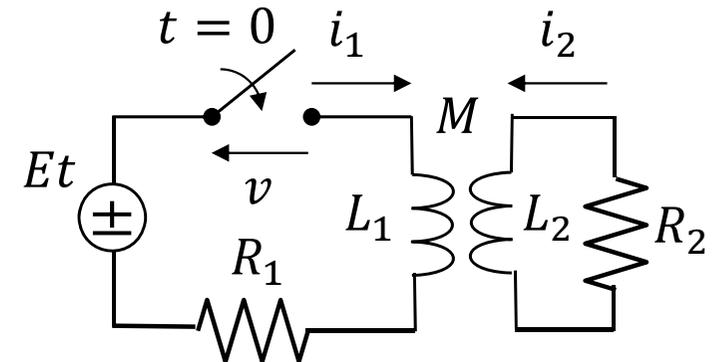
- $(sL_2 + R_2)I_2(s) + sMI_1(s) = 0$

- 行列表現

- $$\begin{bmatrix} sL_1 + R_1 & sM \\ sM & sL_2 + R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{s^2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

- $$\begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sL_1 + R_1 & sM \\ sM & sL_2 + R_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{E}{s^2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{E}{(sL_1 + R_1)(sL_2 + R_2) - (sM)^2} \begin{bmatrix} sL_2 + R_2 & -sM \\ -sM & sL_1 + R_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{E}{s^2} \\ 0 \end{bmatrix}$$



結合インダクタ(トランス)回路

- $R_1 = 0.5\Omega, R_2 = 2\Omega, L_1 = 0.75\text{H}, L_2 = 3\text{H},$
 $M = 0.5\text{H}, E = 1\text{V/s}$

- $$\begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{2s^2+3s+1} \begin{bmatrix} \frac{3s+2}{s^2} \\ -\frac{1}{2s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{s^2} - \frac{3}{s} + \frac{1}{s+1} + \frac{2}{s+0.5} \\ -\frac{1}{2s} - \frac{0.5}{s+1} + \frac{1}{s+0.5} \end{bmatrix}$$

- $i_1(t) = 2t - 3 + e^{-t} + 2e^{-0.5t}$

- $i_2(t) = -0.5 - 0.5e^{-t} + e^{-0.5t}$

回路の応答

- 線形時不変回路の応答
 - 微分代数方程式→ラプラス変換による求解
- 節点 n 個, 枝 b 個の回路網
 - 節点電位ベクトル $E(s)$
 - 一つの節点を基準に選ぶ→ $(n - 1)$ 次
 - 枝電流・枝電圧ベクトル $I(s), V(s)$
 - b 次

回路方程式

- KCL $AI(s) = 0$
- KVL $V(s) = A^T E(s)$
 - 既約接続行列 A $(n - 1) \times b$
- 枝の特性
$$M(s)V(s) + N(s)I(s) = FU(s) + Gx^0$$
 - M, N $b \times b$ の s の多項式
 - F, G 定数行列
 - $U(s)$ 入力電源
 - x^0 初期値

タブロー方程式での表現

$$\bullet \begin{matrix} n-1 \\ b \\ b \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & A \\ -A^T & I_b & 0 \\ 0 & M(s) & N(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E(s) \\ V(s) \\ I(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ FU(s) + Gx^0 \end{bmatrix}$$

$$\bullet T \begin{bmatrix} E(s) \\ V(s) \\ I(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F \end{bmatrix} U(s) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ G \end{bmatrix} x^0$$

$$\bullet \begin{bmatrix} E(s) \\ V(s) \\ I(s) \end{bmatrix} = T^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F \end{bmatrix} U(s) + T^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ G \end{bmatrix} x^0$$

タブロー方程式での表現

- $$\begin{bmatrix} E(s) \\ V(s) \\ I(s) \end{bmatrix} = H(s)U(s) + Q(s)x^0$$
- $H(s)U(s)$ 初期値 x^0 を0とした入力 $U(s)$ に対する応答
 - 零状態応答
- $Q(s)x^0$ 入力 $U(s)$ を0とした初期値 x^0 に対する応答
 - 零入力応答
- 全応答=零状態応答+零入力応答
 - 時間領域 $y(t) = y_{zs}(t) + y_{zi}(t)$
 - 複素領域 $Y(s) = Y_{zs}(s) + Y_{zi}(s)$