回路とシステム
第11回
状態方程式

舟木　剛

平成31年1月21日2限

講義計画

- 回路方程式　1回　※回路理論Ⅰ　3章
  - 節点方程式と閉路方程式
- ラプラス変換による回路解析　1回　※回路理論Ⅱ　3章
- 線形回路の応答　2回　※回路理論Ⅱ　4章
  - 零入力応答（重ね合わせの理、零入力応答の時間応答、漸近安定性）
  - 零状態応答（伝達関数、重ね合わせの理、インパルス応答と合成積、安定伝達関数、周波数応答）
- １ポート回路　3回　※回路理論Ⅱ　5章
  - テブナン・ノートンの定理
  - 安定性と正実性（開放安定性、短絡安定性、正実関数）
- ２ポート回路　4回　※回路理論Ⅱ　6章・8章
  - 2ポート回路の行列表現
  - 相反2ポート回路
  - 相互接続
  - 分布定数回路の等価回路（T形等価回路、π形等価回路）
- 状態方程式による回路解析　2回　※回路理論Ⅱ　７章
  - 状態方程式の導出（状態変数、状態方程式、出力方程式）
  - 状態方程式の解（零入力応答、零状態応答）
- 三相交流　1回
  - 平衡三相回路

状態方程式

- 線形時不変回路
  - 状態方程式
  - 一階連立微分方程式による回路方程式
    - $\frac{d}{dt}x_i(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j(t) + \sum_{j=1}^{m} b_{ij}u_j(t)$
      - $x_i(t)$:状態変数$(i = 1 \cdots n)$※電圧，電流
      - $u_i(t)$:独立電源$(i = 1 \cdots m)$
  - 出力方程式
    - $y_k(t) = \sum_{j=1}^{n} c_{kj}x_j(t) + \sum_{j=1}^{m} d_{kj}u_j(t)$
      - $y_i(t)$:観測変数$(i = 1 \cdots p)$

状態方程式

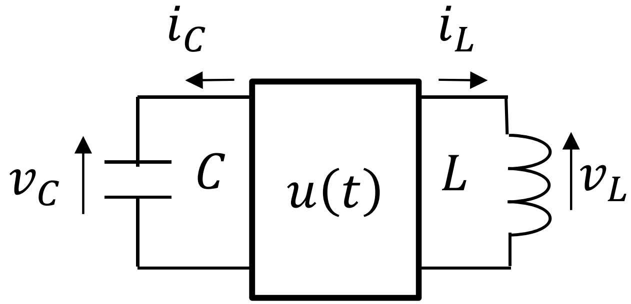
- 状態変数のベクトル表記
  - $\dot{\boldsymbol{x}}^T = [\dot{x}_1, \dot{x}_2, \cdots, \dot{x}_n]$
  - $\boldsymbol{x}^T = [x_1, x_2, \cdots, x_n]$
  - $\boldsymbol{u}^T = [u_1, u_2, \cdots, u_m]$
  - $\boldsymbol{y}^T = [y_1, y_2, \cdots, y_p]$
- 係数行列
  - $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]$　　$n \times m$
  - $\boldsymbol{B} = [b_{ij}]$　　$n \times m$
  - $\boldsymbol{C} = [c_{ij}]$　　$p \times n$
  - $\boldsymbol{D} = [d_{ij}]$　　$p \times m$
- 状態方程式
  - $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)$
  - 未来の状態がわかる
- 出力方程式
  - $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t)$
  - 現在の出力がわかる

状態方程式

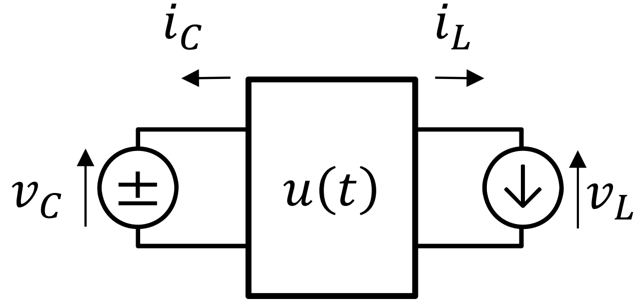
- 利点
  - 計算機に実装しやすい(行列計算)
  - 安定性判別等の解析が容易(固有値計算)
  - 時変系，非線形系への対応が可能
  - 回路内部状態の応答がわかる

状態方程式

- 抵抗と独立電源から成る回路に接続されたコンデンサ･リアクトルの電圧･電流応答
  - $C\frac{dv_C(t)}{dt} = i_C(t)$
  - $L\frac{di_L(t)}{dt} = v_L(t)$



- コンデンサを独立電圧源v_C, リアクトルを独立電流源i_Lとした等価回路

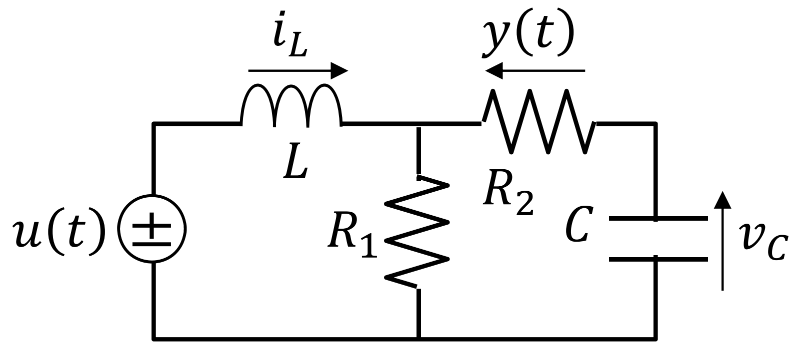


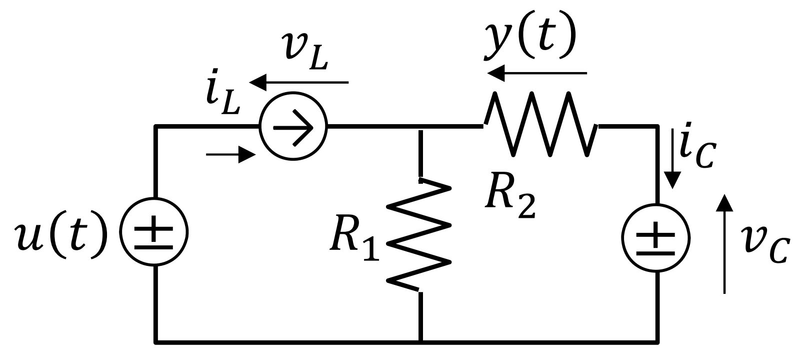
状態方程式

- 外部電源v_C, i_Lと内部電源uにより決まるi_C, v_Lを重ね合わせの理で表す
  - $\begin{cases} i_C(t) = a'_{11}v_C(t) + a'_{12}i_L(t) + \ b'_1u(t) \\ v_L(t) = a'_{21}v_C(t) + a'_{22}i_L(t) + \ b'_2u(t) \end{cases}$
  - $\begin{cases} C\dfrac{dv_C(t)}{dt} = a'_{11}v_C(t) + a'_{12}i_L(t) + \ b'_1u(t) \\ L\dfrac{di_L(t)}{dt} = a'_{21}v_C(t) + a'_{22}i_L(t) + \ b'_2u(t) \end{cases}$
  - $\begin{cases} \dfrac{dv_C(t)}{dt} = \dfrac{a'_{11}}{C}v_C(t) + \dfrac{a'_{12}}{C}i_L(t) + \dfrac{b'_1}{C}u(t) \\ \dfrac{di_L(t)}{dt} = \dfrac{a'_{21}}{L}v_C(t) + \dfrac{a'_{22}}{L}i_L(t) + \dfrac{b'_2}{L}u(t) \end{cases}$

状態方程式例題

- 例題
  - KVL
    - $-u + v_L + R_1(i_L - i_C) = 0$
    - $R_2 i_C + v_C - R_1(i_L - i_C) = 0$
  - 動特性
    - $v_L = L\frac{di_L}{dt}$
    - $i_C = C\frac{dv_C}{dt}$
  - 状態方程式
    - $\begin{cases} -u + L\frac{di_L}{dt} + R_1\left(i_L - C\frac{dv_C}{dt}\right) = 0 \\ R_2 C\frac{dv_C}{dt} + v_C - R_1\left(i_L - C\frac{dv_C}{dt}\right) = 0 \end{cases}$
  - 出力方程式
    - $y = R_2 i_C$





状態方程式例題

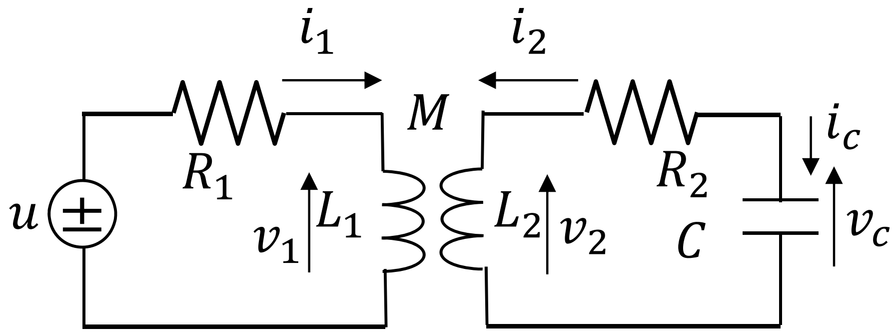
- $\begin{cases} L\frac{di_L}{dt} - R_1C\frac{dv_C}{dt} = -R_1 i_L + u \\ (R_1+R_2)C\frac{dv_C}{dt} = R_1 i_L - v_C \end{cases}$
- $\begin{bmatrix} L & -R_1C \\ 0 & (R_1+R_2)C \end{bmatrix} \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_1 & 0 \\ R_1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u \\ 0 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} L & -R_1C \\ 0 & (R_1+R_2)C \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(R_1+R_2)CL}\begin{bmatrix} (R_1+R_2)C & R_1C \\ 0 & L \end{bmatrix}$
- $\frac{1}{(R_1+R_2)CL}\begin{bmatrix} (R_1+R_2)C & R_1C \\ 0 & L \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -R_1 & 0 \\ R_1 & -1 \end{bmatrix} =$
  $\frac{1}{(R_1+R_2)CL}\begin{bmatrix} -R_1(R_1+R_2)C + {R_1}^2C & -R_1C \\ R_1L & -L \end{bmatrix} = \frac{1}{(R_1+R_2)CL}\begin{bmatrix} -R_1R_2C & -R_1C \\ R_1L & -L \end{bmatrix} =$
  $\frac{1}{R_1+R_2}\begin{bmatrix} -\frac{R_1R_2}{L} & -\frac{R_1}{L} \\ \frac{R_1}{C} & -\frac{1}{C} \end{bmatrix}$

状態方程式例題

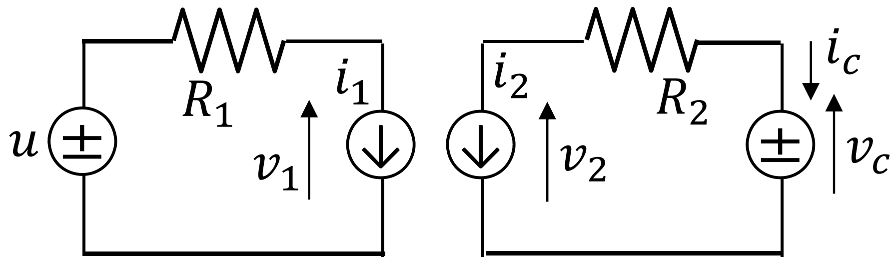
- $\frac{1}{(R_1+R_2)CL}\begin{bmatrix}(R_1+R_2)C & R_1C\\ 0 & L\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\0\end{bmatrix}=\frac{1}{(R_1+R_2)CL}\begin{bmatrix}(R_1+R_2)Cu\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{u}{L}\\0\end{bmatrix}$
- $\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}i_L\\v_C\end{bmatrix}=\frac{1}{R_1+R_2}\begin{bmatrix}-\frac{R_1R_2}{L} & -\frac{R_1}{L}\\ \frac{R_1}{C} & -\frac{1}{C}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i_L\\v_C\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{u}{L}\\0\end{bmatrix}$
- 出力方程式
  - $y=R_2i_C=R_2C\frac{dv_C}{dt}=\frac{R_2C}{R_1+R_2}\begin{bmatrix}\frac{R_1}{C} & -\frac{1}{C}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i_L\\v_C\end{bmatrix}=\frac{R_2}{R_1+R_2}\begin{bmatrix}R_1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i_L\\v_C\end{bmatrix}$

状態方程式例題

- 結合インダクタを含む回路
  - 状態変数
    - i_1, i_2, v_C
  - 結合インダクタの電圧・電流
    - $\begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$
  - KVL
    - $v_1 = u - R_1 i_1$
    - $v_2 = v_c - R_2 i_2$
  - コンデンサ
    - $C \frac{d}{dt} v_c = i_c = -i_2$
  - 状態方程式
    - $\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_1 & 0 \\ 0 & -R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u \\ v_c \end{bmatrix}$



等価回路



状態方程式例題

- $$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{L_1L_2 - M^2}\begin{bmatrix} L_2 & -M \\ -M & L_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{L_1L_2 - M^2}\begin{bmatrix} L_2 & -M \\ -M & L_1 \end{bmatrix}\left\{\begin{bmatrix} -R_1 & 0 \\ 0 & -R_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u \\ v_c \end{bmatrix}\right\}$$
$$= \frac{1}{L_1L_2 - M^2} + \left\{\begin{bmatrix} -L_2R_1 & MR_2 \\ MR_1 & -L_1R_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} uL_2 & -Mv_c \\ -Mu & L_1v_c \end{bmatrix}\right\}$$
$$= \frac{1}{L_1L_2 - M^2} + \left\{\begin{bmatrix} -L_2R_1 & MR_2 & -M \\ MR_1 & -L_1R_2 & L_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ v_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_2 \\ -M \end{bmatrix}u\right\}$$
- $$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ v_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-L_2R_1}{L_1L_2-M^2} & \frac{MR_2}{L_1L_2-M^2} & \frac{-M}{L_1L_2-M^2} \\ \frac{MR_1}{L_1L_2-M^2} & \frac{-L_1R_2}{L_1L_2-M^2} & \frac{L_1}{L_1L_2-M^2} \\ 0 & \frac{-1}{C} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ v_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{L_2}{L_1L_2-M^2} \\ \frac{-M}{L_1L_2-M^2} \\ 0 \end{bmatrix}u$$

状態方程式の解

- 状態方程式
  - $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)$　　$\boldsymbol{A}: n \times n, \boldsymbol{B}: n \times m$
  - $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t)$　　$\boldsymbol{C}: p \times n, \boldsymbol{D}: p \times m$
  - $n = 2, m = 1, p = 1$のケース
    - $\dot{x_1} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1 u$
    - $\dot{x_2} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2 u$
    - $y = c_1 x_1 + c_2 x_2 + du$

状態方程式の解

- ラプラス変換
  - $sX_1(s) - x_1(0^-) = a_{11}X_1(s) + a_{12}X_2(s) + b_1U(s)$
  - $sX_2(s) - x_2(0^-) = a_{21}X_1(s) + a_{22}X_2(s) + b_2U(s)$
  - $Y(s) = c_1X_1(s) + c_2X_2(s) + dU(s)$
- 行列表現
  - $\mathcal{L}[\boldsymbol{x}(t)] = \boldsymbol{X}(s) = \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix}$
  - $s\boldsymbol{X}(s) - \boldsymbol{x}(0^-) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(s) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(s)$
  - $\boldsymbol{Y}(s) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{X}(s) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{U}(s)$

状態方程式の解

- 行列表現
  - $(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}(s)=\boldsymbol{x}(0^-)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(s)$
  - $\boldsymbol{X}(s)=(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{x}(0^-)+(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(s)$
  - $\boldsymbol{Y}(s)=\boldsymbol{C}[(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{x}(0^-)+(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(s)]+\boldsymbol{D}\boldsymbol{U}(s)$
    $=\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{x}(0^-)+[(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}]\boldsymbol{U}(s)$
    - 零入力応答　$\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{x}(0^-)$
    - 零状態応答　$[(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}]\boldsymbol{U}(s)$