回路とシステム
第12回
状態方程式
三相回路

舟木　剛

平成31年1月28日2限

講義計画

- 回路方程式　1回　※回路理論Ｉ 3章
  - 節点方程式と閉路方程式
- ラプラス変換による回路解析　1回　※回路理論 II　3章
- 線形回路の応答　2回　※回路理論 II　4章
  - 零入力応答（重ね合わせの理、零入力応答の時間応答、漸近安定性）
  - 零状態応答（伝達関数、重ね合わせの理、インパルス応答と合成積、安定伝達関数、周波数応答）
- １ポート回路　3回　※回路理論 II　5章
  - テブナン・ノートンの定理
  - 安定性と正実性（開放安定性、短絡安定性、正実関数）
- ２ポート回路　4回　※回路理論 II　6章・8章
  - 2ポート回路の行列表現
  - 相反2ポート回路
  - 相互接続
  - 分布定数回路の等価回路（T形等価回路、π形等価回路）
- 状態方程式による回路解析　2回　※回路理論 II　７章
  - 状態方程式の導出（状態変数、状態方程式、出力方程式）
  - 状態方程式の解（零入力応答、零状態応答）
- 三相交流　1回
  - 平衡三相回路

状態方程式の解

- 状態方程式
  - $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)$ $\boldsymbol{A}: n \times n, \boldsymbol{B}: n \times m$
  - $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t)$ $\boldsymbol{C}: p \times n, \boldsymbol{D}: p \times m$
  - $n = 2, m = 1, p = 1$のケース
    - $\dot{x_1} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1u$
    - $\dot{x_2} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2u$
    - $y = c_1x_1 + c_2x_2 + du$

状態方程式の解

- ラプラス変換
  - $sX_1(s) - x_1(0^-) = a_{11}X_1(s) + a_{12}X_2(s) + b_1U(s)$
  - $sX_2(s) - x_2(0^-) = a_{21}X_1(s) + a_{22}X_2(s) + b_2U(s)$
  - $Y(s) = c_1X_1(s) + c_2X_2(s) + dU(s)$
- 行列表現
  - $\mathcal{L}[\boldsymbol{x}(t)] = \boldsymbol{X}(s) = \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix}$
  - $s\boldsymbol{X}(s) - \boldsymbol{x}(0^-) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(s) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(s)$
  - $\boldsymbol{Y}(s) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{X}(s) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{U}(s)$

状態方程式の解

- 行列表現
  - $(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}(s)=\boldsymbol{x}(0^-)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(s)$
  - $\boldsymbol{X}(s)=(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{x}(0^-)+(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(s)$
  - $\boldsymbol{Y}(s)=\boldsymbol{C}[(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{x}(0^-)+(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(s)]+\boldsymbol{D}\boldsymbol{U}(s)$
    $=\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{x}(0^-)+[(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}]\boldsymbol{U}(s)$
    - 零入力応答　$\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{x}(0^-)$
    - 零状態応答　$[(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}]\boldsymbol{U}(s)$

状態方程式の零入力応答

- 零入力
  - 初期状態　$\boldsymbol{x}(0^-)$
  - 入力　$u(t) = 0$
- 状態方程式
  - $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)$
  - ラプラス変換
    - $s\boldsymbol{X}(s) - \boldsymbol{x}(0^-) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(s)$
    - $\boldsymbol{X}(s) = (s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{x}(0^-)$
    - $n = 1$の場合
      - $X(s) = \frac{x(0^-)}{s-A}$　→　$x(t) = x(0^-)e^{At}$

状態方程式の零入力応答

- 行列指数関数$(n > 1)$
  - $e^{\boldsymbol{A}t} = \mathcal{L}^{-1}[(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}]$
  - $\boldsymbol{x}(t) = \mathcal{L}^{-1}[(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{x}(0^-)] = e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}(0^-)$
  - $(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} = \frac{\mathrm{adj}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})}{\det(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})} = \frac{\boldsymbol{B}(s)}{d(s)}$
    - $\boldsymbol{B}(s) = \mathrm{adj}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})$ 　行列$(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})$余因子行列
    - $d(s) = \det(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})$ 　$\boldsymbol{A}$の特性多項式
    - 特性方程式
      - $d(s) = (s - \lambda_1)\cdots(s - \lambda_n)$ 　λ_i:行列$\boldsymbol{A}$の固有値
  - $(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\boldsymbol{K}_i}{s-\lambda_i}$ 　部分分数展開
    - 行列の場合$\boldsymbol{K}_i$も行列になる
    - $\boldsymbol{K}_i = \lim_{s\to\lambda_i}(s - \lambda_i)(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}$
    - $e^{\boldsymbol{A}t} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{K}_i e^{\lambda_i t}$

行列指数関数の例

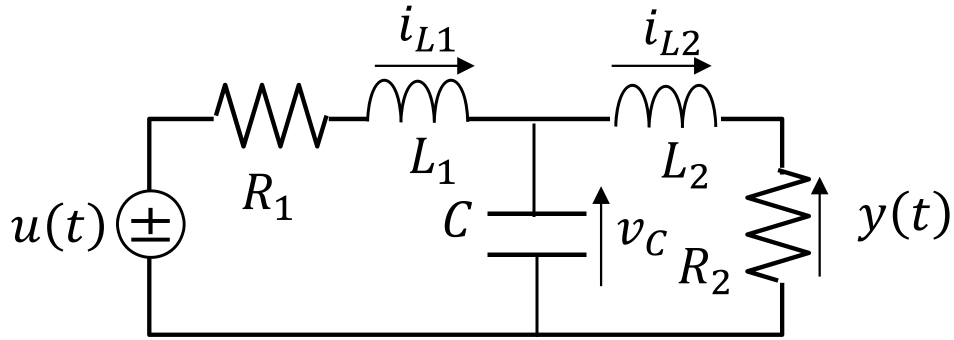
- $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$
  - $(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} = \begin{bmatrix} s-1 & -2 \\ -2 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(s-1)(s+2)-4}\begin{bmatrix} s+2 & -2 \\ -2 & s-1 \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2+s-6}\begin{bmatrix} s+2 & -2 \\ -2 & s-1 \end{bmatrix} = \frac{1}{(s-2)(s+3)}\begin{bmatrix} s+2 & -2 \\ -2 & s-1 \end{bmatrix}$
  - $\boldsymbol{K}_1 = \lim_{s\to 2}(s-2)(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} = \lim_{s\to 2}\frac{1}{s+3}\begin{bmatrix} s+2 & -2 \\ -2 & s-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$
  - $\boldsymbol{K}_2 = \lim_{s\to -3}(s+3)(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} = \lim_{s\to -3}\frac{1}{s-2}\begin{bmatrix} s+2 & -2 \\ -2 & s-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$
  - $e^{\boldsymbol{A}t} = \boldsymbol{K}_1 e^{\lambda_1 t} + \boldsymbol{K}_2 e^{\lambda_2 t} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} e^{2t} + \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} e^{-3t}$

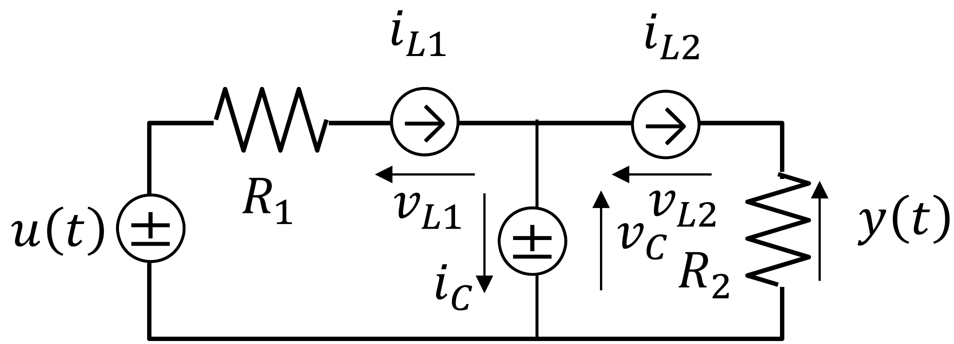
状態方程式の零状態応答

- 零状態
  - 初期状態　$\boldsymbol{x}(0^-) = 0$
  - 入力　$u(t)$
- 状態方程式
  - $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)$
  - ラプラス変換
    - $s\boldsymbol{X}(s) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(s) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(s)$
    - $(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{X}(s) = \boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(s)$
    - $\boldsymbol{X}(s) = (s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(s)$
    - $\boldsymbol{Y}(s) = [\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D}]\boldsymbol{U}(s) = \boldsymbol{H}(s)\boldsymbol{U}(s)$
      - $\boldsymbol{H}(s) = \boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D}$
  - 時間応答(畳み込み積分)
    - $\boldsymbol{x}(t) = \int_{0^-}^{t^+} e^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)d\tau$
    - $\boldsymbol{y}(t) = \int_{0^-}^{t^+} \boldsymbol{C}e^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)d\tau + d\boldsymbol{u}(t)$

伝達関数の求解例

- 入力$u(t)$, 出力$y(t)$
- KVL
  - $u - R_1 i_{L1} - v_{L1} - v_c = 0$
  - $R_2 i_{L2} + v_{L2} - v_C = 0$
- KCL
  - $i_C = i_{L1} - i_{L2}$
- 動特性
  - $v_{L1} = L_1 \frac{di_{L1}}{dt}$
  - $v_{L2} = L_2 \frac{di_{L2}}{dt}$
  - $i_C = C \frac{dv_C}{dt}$
- 状態方程式
  - $\begin{cases} u - R_1 i_{L1} - L_1 \frac{di_{L1}}{dt} - v_c = 0 \\ R_2 i_{L2} + L_2 \frac{di_{L2}}{dt} - v_C = 0 \\ i_{L1} - i_{L2} = C \frac{dv_C}{dt} \end{cases}$





- 出力態方程式
  - $y = R_2 i_{L2}$

伝達関数の求解例

- 状態方程式の変形

$$\frac{di_{L1}}{dt}=\frac{u}{L_1}-\frac{R_1 i_{L1}}{L_1}-\frac{v_c}{L_1}$$

- $$\frac{di_{L2}}{dt}=-\frac{R_2 i_{L2}}{L_2}+\frac{v_C}{L_2}$$

$$\frac{dv_C}{dt}=\frac{i_{L1}}{C}-\frac{i_{L2}}{C}$$

- 出力方程式の変形
  - 行列表示
  - $$y=\begin{bmatrix}0 & R_2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i_{L1}\\ i_{L2}\\ v_c\end{bmatrix}$$

- 行列表示
  - $$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}i_{L1}\\ i_{L2}\\ v_c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{-R_1}{L_1} & 0 & \frac{-1}{L_1}\\ 0 & \frac{-R_2}{L_2} & \frac{1}{L_2}\\ \frac{1}{C} & \frac{-1}{C} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i_{L1}\\ i_{L2}\\ v_c\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{L_1}\\ 0\\ 0\end{bmatrix}u$$

伝達関数の求解例

- $A = \begin{bmatrix} \frac{-R_1}{L_1} & 0 & \frac{-1}{L_1} \\ 0 & \frac{-R_2}{L_2} & \frac{1}{L_2} \\ \frac{1}{C} & \frac{-1}{C} & 0 \end{bmatrix}$
- $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
- $X = \begin{bmatrix} i_{L1} \\ i_{L2} \\ v_c \end{bmatrix}$

- $sX = AX + Bu$
- $(sI - A)X = Bu$
- $X = (sI - A)^{-1}Bu$
- $y = [0 \quad R_2 \quad 0]X$
  $= [0 \quad R_2 \quad 0](sI - A)^{-1}Bu$
- 伝達関数
  - $\frac{y}{u} = [0 \quad R_2 \quad 0](sI - A)^{-1}B$
- $(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} = \frac{\mathrm{adj}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})}{\det(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})}$

伝達関数の求解例

- $\det(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}) = \det\begin{vmatrix} s+\frac{R_1}{L_1} & 0 & \frac{1}{L_1} \\ 0 & s+\frac{R_2}{L_2} & \frac{-1}{L_2} \\ \frac{-1}{C} & \frac{1}{C} & s \end{vmatrix} = \left(s+\frac{R_1}{L_1}\right)\left(s+\frac{R_2}{L_2}\right)s + \frac{1}{L_1}\left(s+\frac{R_2}{L_2}\right)\frac{1}{C} + \left(s+\frac{R_1}{L_1}\right)\frac{1}{L_2}\frac{1}{C} = \left(s+\frac{R_1}{L_1}\right)\left(s+\frac{R_2}{L_2}\right)s + \left(s+\frac{R_2}{L_2}\right)\frac{1}{L_1C} + \left(s+\frac{R_1}{L_1}\right)\frac{1}{L_2C}$

- $\begin{bmatrix} 0 & R_2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_2k_{21} & R_2k_{22} & R_2k_{23} \end{bmatrix}$

- $\begin{bmatrix} R_2k_{21} & R_2k_{22} & R_2k_{23} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{R_2k_{21}}{L_1}$

- $k_{21} = \mathrm{adj}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})_{21}$

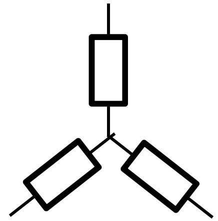
$$= (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{L_1} \\ \frac{1}{C} & s \end{vmatrix} = \frac{1}{L_1C}$$

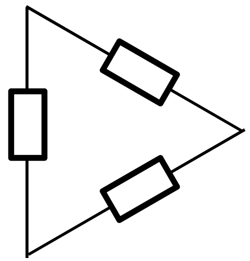
多相交流回路

- 複数の交流電源が回路に同時に存在
  - n個存在→n 相式
  - 周波数が同じ
  - 位相が異なる
  - その他の条件
    - 対称多相方式
      - n個の起電力の大きさが等しく，位相差が等間隔
    - 非対称多相方式
      - n個の起電力の大きさが一致しない，または位相差が等間隔でない

多相交流の結合方式

- 独立多相方式　各相が結合されていない
- 結合多相方式　各相が結合されている
  - 平衡多相方式
    - 各相の瞬時電力の和が一定
  - 不平衡多相方式
    - 各相の瞬時電力の和が脈動する
  - 星形結線　各相の終端が共通
    - 三相Y結線
  - 環状結線　各相の終端を次相の始端に接続
    - 三相Δ結線





対称多相交流

- 対称n相交流の起電力の瞬時値
  - $e_a = E_m \sin \omega t$
  - $e_b = E_m \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{n}\right)$
  - $e_n = E_m \sin\left(\omega t - \frac{(n-1)\pi}{n}\right)$
    - E_m:振幅
    - ω:角周波数
    - $\frac{2\pi}{n}$:位相差
- ベクトル表記
  - $E_a = E$
  - $E_b = Ee^{-j\frac{2\pi}{n}} = E\left(\cos\frac{2\pi}{n} - j\sin\frac{2\pi}{n}\right)$
  - $E_n = Ee^{-j\frac{n-1}{n}2\pi} = E\left(\cos\frac{n-1}{n}2\pi - j\sin\frac{n-1}{n}2\pi\right)$
  - $a = e^{j\frac{2\pi}{n}} = \cos\frac{2\pi}{n} + j\sin\frac{2\pi}{n}$
    - $E_a = E$
    - $E_b = a^{-1}E$
    - $E_n = a^{-(n-1)}E$

対称n相交流の星形起電力と環状起電力の関係

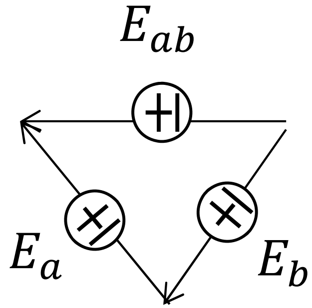
- 星形起電力
  - $E_a, E_b, \cdots, E_n$
- 環状起電力
  - $E_{ab}, E_{bc}, \cdots, E_{na}$
- 関係
  - $E_{ab} = E_a - E_b = E - a^{-1}E = (1 - a^{-1})E$
  - $E_{bc} = E_b - E_c = a^{-1}E - a^{-2}E = a^{-1}(1 - a^{-1})E$
  - $E_{na} = E_n - E_a = a^{-(n-1)}E - E = \left(a^{-(n-1)} - 1\right)E$

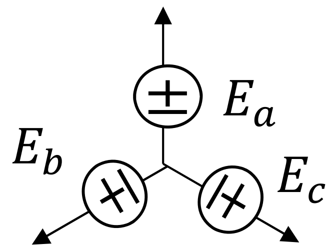
ベクトル計算

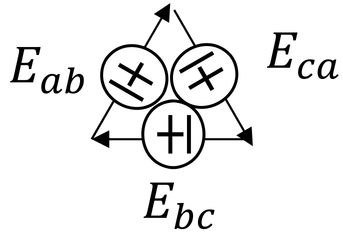
- $1-a^{-1}=1-e^{-j\frac{2\pi}{n}}=1-\cos\frac{2\pi}{n}+j\sin\frac{2\pi}{n}=1-\cos^2\frac{\pi}{n}+\sin^2\frac{\pi}{n}+j2\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}=2\sin^2\frac{\pi}{n}+j2\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}=2\sin\frac{\pi}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+j\cos\frac{\pi}{n}\right)=2\sin\frac{\pi}{n}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n}\right)+j\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n}\right)\right)=2\sin\frac{\pi}{n}e^{j\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n}\right)}=2\sin\frac{\pi}{n}e^{j\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{2}{n}\right)}$
- $E_{ab}=2E\sin\frac{\pi}{n}e^{j\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{2}{n}\right)}$
- $E_{bc}=2E\sin\frac{\pi}{n}e^{j\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{2}{n}\right)}e^{-j\frac{2\pi}{n}}=2E\sin\frac{\pi}{n}e^{j\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{3}{n}\right)}$
- $E_{na}=2E\sin\frac{\pi}{n}e^{j\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{2}{n}\right)}e^{-j\frac{(n-1)2\pi}{n}}=2E\sin\frac{\pi}{n}e^{j\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{3}{n}\right)}$
- 起電力は$2\sin\frac{\pi}{n}$倍となり，位相は$\frac{\pi}{2}$すすむ

対称n相回路の起電力の関係

- $E_a + E_b + \cdots + E_n = 0$
- $E_{ab} + E_{bc} + \cdots + E_{na} = 0$
- 電流も同様
- $n = 3$→三相交流
  - $e_a = E_m \sin \omega t$
  - $e_b = E_m \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)$
  - $e_c = E_m \sin\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right)$
  - $e_a + e_b + e_c = E_m \sin \omega t + E_m \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) + E_m \sin\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) = E_m \left\{\sin \omega t + \sin \omega t \cos \frac{2\pi}{3} - \cos \omega t \sin \frac{2\pi}{3} + \sin \omega t \cos \frac{2\pi}{3} + \cos \omega t \sin \frac{2\pi}{3}\right\} = E_m \left\{\sin \omega t - \frac{1}{2} \sin \omega t - \frac{1}{2} \sin \omega t\right\} = 0$







対称3相回路の起電力の関係

- ベクトル表現
  - $E_a = E$
  - $E_b = Ee^{-j\frac{2\pi}{3}} = Ea^{-1}$
  - $E_c = Ee^{-j\frac{4\pi}{3}} = Ea^{-2}$
  - $a = e^{j\frac{2\pi}{3}} = \cos\frac{2\pi}{3} + j\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$
  - $a^2 = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$
  - $a^3 = 1$
  - $1 + a + a^2 = 0$

対称3相回路の起電力の関係

- 相電圧E_a, E_b, E_c
- 線間電圧
  - $E_{ab} = E_a - E_b = E_a(1 - a^2) = \sqrt{3}E_a e^{j\frac{\pi}{6}}$
  - $E_{bc} = E_b - E_c = E_b(1 - a^2) = \sqrt{3}E_b e^{j\frac{\pi}{6}}$
  - $E_{ca} = E_c - E_a = E_c(1 - a^2) = \sqrt{3}E_c e^{j\frac{\pi}{6}}$
- 線間電圧は相電圧の$\sqrt{3}$倍，位相は$\frac{\pi}{6}$進む