回路とシステム
第二回　回路方程式
節点方程式と閉路方程式

舟木　剛

2019年10月21日2限

講義計画

- 回路方程式　1回
  - 節点方程式と閉路方程式
- ラプラス変換による回路解析　1回
- 線形回路の応答　2回
  - 零入力応答（重ね合わせの理、零入力応答の時間応答、漸近安定性）
  - 零状態応答（伝達関数、重ね合わせの理、インパルス応答と合成積、安定伝達関数、周波数応答）
- １ポート回路　3回
  - テブナン・ノートンの定理
  - 安定性と正実性（開放安定性、短絡安定性、正実関数）
- ２ポート回路　4回
  - 2ポート回路の行列表現
  - 相反2ポート回路
  - 相互接続
  - 分布定数回路の等価回路（T形等価回路、π形等価回路）
- 状態方程式による回路解析　2回
  - 状態方程式の導出（状態変数、状態方程式、出力方程式）
  - 状態方程式の解（零入力応答、零状態応答）
- 三相交流　1回
  - 平衡三相回路

回路方程式

- 節点:回路素子の接続点
  - 始点:素子に入る, 終点:素子から出る
- 枝:回路素子等の節点間をつなぐもの
- 閉路:枝をつないで電流が流れる経路がある状態
  - 閉路が形成されないと回路として機能しない
- 木:閉路を形成しない最大の枝の集合
  - 全ての節点を含む
  - 組み合わせは複数ある
- 補木:木に含まれない枝の集合
  - 木に補木を付加すると閉路が形成される

節点変換まとめ

- 素子数m個，節点数n個の回路
  - $\boldsymbol{v}(t)$:素子電圧ベクトル，$\boldsymbol{i}(t)$:素子電流ベクトル
- 節点方程式
  - $\boldsymbol{A}_r \boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{A}_r{}^T \boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{A}_r \boldsymbol{j}(t) = 0$
    - KCL方程式$n-1$個より導出
    - $\boldsymbol{u}(t)$:節点電位ベクトル，$\boldsymbol{j}(t)$:電流源ベクトル
    - $\boldsymbol{\Psi}$:電圧制御型の特性行列(対角行列)
    - $\boldsymbol{A}_r$:既約接続行列
  - $\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{A}_r{}^T \boldsymbol{u}(t)$
  - $\boldsymbol{i}(t) = \boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{v}(t) + \boldsymbol{j}(t)$

閉路変換

- n個の節点，m個の枝に対する木T，補木T'を考える
  - 補木T'による基本閉路$m-n+1$個
  - 基準節点0に対する既約接続行列$\boldsymbol{A}_r$
    - $\boldsymbol{A}_r = [\boldsymbol{A}_c | \boldsymbol{A}_t]$
      - $\boldsymbol{A}_c$:補木T'，$\boldsymbol{A}_t$:木Tに対応する$\boldsymbol{A}_r$の部分行列
  - 基本閉路行列
    - $\boldsymbol{B}_f = [\boldsymbol{I} | \boldsymbol{B}_t]$
      - 列を$\boldsymbol{A}_r$にそろえる。
        - $\boldsymbol{I}$:補木T'，$\boldsymbol{B}_t$:木Tに対応する$\boldsymbol{B}_f$の部分行列

閉路変換

- 接続行列$\boldsymbol{A}$，閉路行列$\boldsymbol{B}$の列の順序の対応 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^T = 0$
  - $\boldsymbol{A}$のp行　　$\boldsymbol{a}_p = [a_{p1} \quad a_{p2} \quad \cdots \quad a_{pn}]$
  - $\boldsymbol{B}^T$の$\boldsymbol{r}$列=$\boldsymbol{B}$の$\boldsymbol{r}$行　$\boldsymbol{b}_{\boldsymbol{r}} = [b_{r1} \quad b_{r2} \quad \cdots \quad b_{rn}]$
  - $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^T$の$(p,r)$要素　$a_p {b_r}^T = \sum_{k=1}^{n} a_{pk} b_{rk}$
  - $\boldsymbol{A}$のp行に対応する節点pが，$\boldsymbol{B}$のr行に対応する閉路rにない場合 $b_{rk} = 0$
    - $a_p {b_r}^T = 0$

閉路変換

- $\boldsymbol{A}$のp行に対応する節点pが，$\boldsymbol{B}$のr行に対応する閉路rにある場合
  - 節点pに接続され，閉路r上にある枝は2個存在k_1, k_2
    - 枝k_1, k_2が閉路r上で同じ向き
      - $a_{pk_1} = -a_{pk_2}$　　$b_{rk_1} = b_{rk_2}$
    - 枝k_1, k_2が閉路r上で逆向き
      - $a_{pk_1} = a_{pk_2}$　　$b_{rk_1} = -b_{rk_2}$
    - $a_p {b_r}^T = a_{pk_1} b_{rk_1} + a_{pk_2} b_{rk_2} = 0$

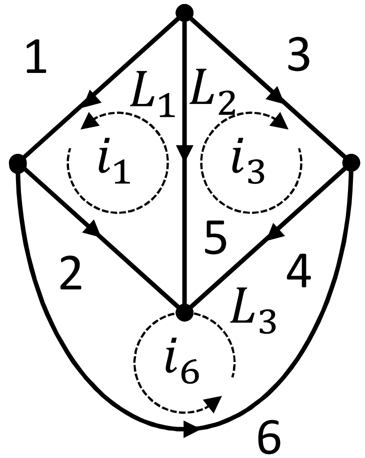
閉路変換

- $\boldsymbol{A}_r\boldsymbol{B}_f{}^T = [\boldsymbol{A}_c\boldsymbol{A}_t][\boldsymbol{I}\boldsymbol{B}_t]^T = \boldsymbol{A}_c + \boldsymbol{A}_t\boldsymbol{B}_t{}^T = 0$
  - $\boldsymbol{A}_t\boldsymbol{B}_t{}^T = -\boldsymbol{A}_c \qquad \boldsymbol{B}_t{}^T = -\boldsymbol{A}_t{}^{-1}\boldsymbol{A}_c$
- 電流ベクトル$\boldsymbol{i}$を$\boldsymbol{A}_r$にそろえる
  - $\boldsymbol{i}^T = [\boldsymbol{i}_c|\boldsymbol{i}_t]^T$
    - $\boldsymbol{i}_c$:補木T'，$\boldsymbol{i}_t$:木Tに対応する$\boldsymbol{i}$の部分ベクトル
- KCL方程式
  - $\boldsymbol{A}_r\boldsymbol{i} = [\boldsymbol{A}_c\boldsymbol{A}_t]\begin{bmatrix}\boldsymbol{i}_c\\ \boldsymbol{i}_t\end{bmatrix} = \boldsymbol{A}_c\boldsymbol{i}_c + \boldsymbol{A}_t\boldsymbol{i}_t = 0$
    - $\boldsymbol{i}_t = -\boldsymbol{A}_t{}^{-1}\boldsymbol{A}_c\boldsymbol{i}_c = \boldsymbol{B}_t{}^T\boldsymbol{i}_c$

閉路変換

- 補木T'の枝kの素子電流i_k
- 枝kできまる基本閉路L_k
- 素子電流i_kは基本閉路L_kの閉路電流となる

閉路変換の例



- 木2,4,5
- 補木1,3,6
- 補木1,3,6の枝の素子電流i_1, i_3, i_6
- 補木1,3,6が形成する閉路L_1, L_2, L_3
- 木2,4,5の枝に対応する素子電流i_2, i_4, i_5
- $\boldsymbol{B_f} = [\overset{\boldsymbol{T}}{\boldsymbol{I}}|\overset{\boldsymbol{T'}}{\boldsymbol{B_t}}] = \begin{array}{c} \\ L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 3 & 6 & 2 & 4 & 5 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & 1 & & -1 \\ & 1 & & & 1 & -1 \\ & & 1 & -1 & 1 & \end{array}\right] \end{array}$

閉路変換の例

- $$\begin{bmatrix} i_2 \\ i_4 \\ i_5 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} 2 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & & -1 \\ & 1 & 1 \\ -1 & -1 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_3 \\ i_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_1 - i_6 \\ i_3 + i_6 \\ -i_1 - i_3 \end{bmatrix}$$
$$= \boldsymbol{B_t}^T \boldsymbol{i_c}$$
- 木$\boldsymbol{T}$の電流ベクトル$\boldsymbol{i}_t = [i_2 \quad i_4 \quad i_5]^T$
- 補木$\boldsymbol{T}'$の電流ベクトル$\boldsymbol{i}_c = [i_1 \quad i_3 \quad i_6]^T$
- $$\boldsymbol{i} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{i}_c \\ \boldsymbol{i}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{i}_c \\ \boldsymbol{B_t}^T \boldsymbol{i}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{B_t}^T \end{bmatrix} \boldsymbol{i}_c = [\boldsymbol{I} \quad \boldsymbol{B}_t]^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{i}_c = \boldsymbol{B_f}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{i}_c$$

電流制御形素子

- 素子電圧$v(t)$が素子電流$i(t)$の関数で表される
  - 電圧源は係数が0の電流制御型素子と見なす
  - 抵抗:$v(t) = Ri(t)$
  - コンデンサ:$v(t) = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\tau)d\tau + v(t_0) = \frac{1}{C}\Gamma i(t) + v(t_0)$
  - インダクタ:$v(t) = L\frac{d}{dt}i(t) = L\Delta i(t)$
  - 電圧源:$v(t) = 0i(t) + e(t) = e(t)$
    - Δ:微分記号, Γ:積分記号, t_0:時刻初期値

閉路方程式の導出

- 補木電流変換:$\boldsymbol{i}(t) = \boldsymbol{B_f}^T \boldsymbol{i}_c(t)$
- KVL方程式:$\boldsymbol{B_f}\boldsymbol{v}(t) = 0$
- 特性方程式:$\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{\Xi}\boldsymbol{i}(t) + \boldsymbol{e}(t)$
  - $\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{\Xi}\boldsymbol{i}(t) + \boldsymbol{e}(t) = \boldsymbol{\Xi}\boldsymbol{B_f}^T \boldsymbol{i}_c(t) + \boldsymbol{e}(t)$
- 閉路方程式の導出:$\boldsymbol{B_f}\boldsymbol{v}(t) = 0$
  - $\boldsymbol{B_f}\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{B_f}\left(\boldsymbol{\Xi}\boldsymbol{i}(t) + \boldsymbol{e}(t)\right) = 0$
  - $\boldsymbol{B_f}\boldsymbol{\Xi}\boldsymbol{i}(t) + \boldsymbol{B_f}\boldsymbol{e}(t) = 0$
    - $m - n + 1$個の節点電位を未知数とする連立方程式
    - $m - n$個の独立なループに対するKVL方程式

閉路変換まとめ

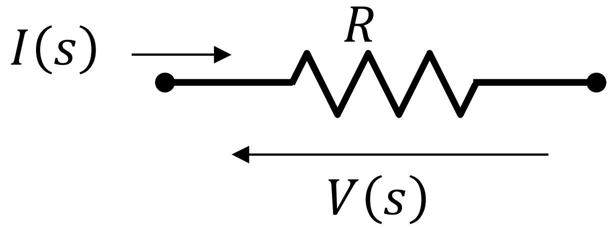
- 閉路方程式
  - $\boldsymbol{B_f} \boldsymbol{\Xi} \boldsymbol{B_f}^T \boldsymbol{i}_c(t) + \boldsymbol{B_f} \boldsymbol{e}(t) = 0$
    - KVL方程式$m - n + 1$個より導出
    - $\boldsymbol{i}_c(t)$:閉路電流ベクトル，$\boldsymbol{e}(t)$:電圧源ベクトル
    - $\boldsymbol{\Xi}$:電流制御型の特性行列(対角行列)
    - $\boldsymbol{B_f}$:基本閉路行列
  - $\boldsymbol{i}(t) = \boldsymbol{B_f}^T \boldsymbol{i}_c(t)$
  - $\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{\Xi} \boldsymbol{i}(t) + \boldsymbol{e}(t)$

ラプラス変換による回路解析

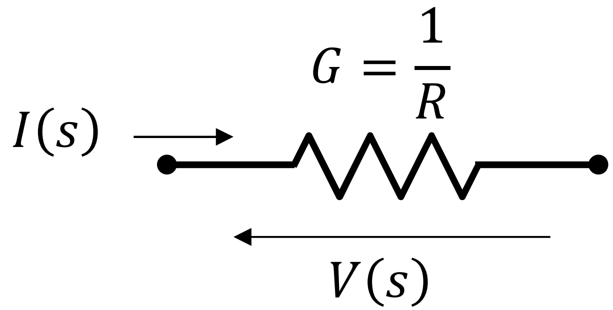
- 回路の過渡応答　→　微分方程式
- 線形時不変回路　→　ラプラス変換による常微分方程式の求解が可能
- ラプラス変換
  - $F(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt$
    - $\mathcal{L}[i_k(t)] = I_k(s), \mathcal{L}[v_k(t)] = V_k(s)$
  - $f(t) = \lim_{p \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-ip}^{c+ip} F(s) e^{st} ds$

ラプラス変換による回路解析

- 抵抗
  - インピーダンス表現
    - $v(t) = Ri(t) \;\rightarrow\; V(s) = RI(s)$



  - アドミタンス表現
    - $i(t) = Gv(t) \;\rightarrow\; I(s) = GV(s)$



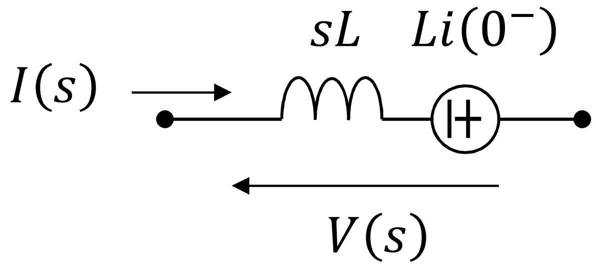
ラプラス変換による回路解析

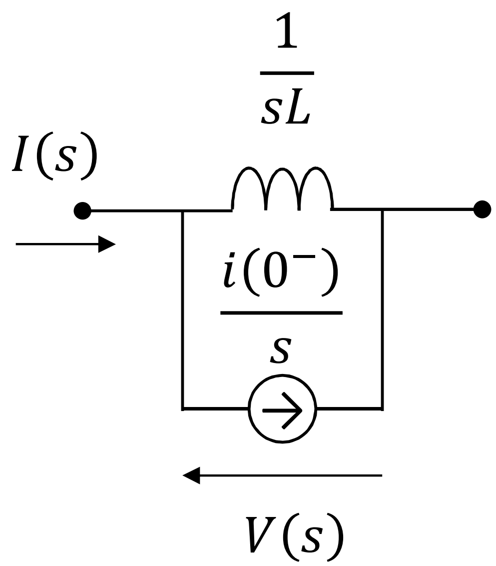
- インダクタ
  - $L\dfrac{di(t)}{dt} = v(t)$
    - インピーダンス表現

$$V(s) = sLI(s) - Li(0^-)$$

    - アドミタンス表現

$$I(s) = \frac{1}{sL}V(s) + \frac{i(0^-)}{s}$$



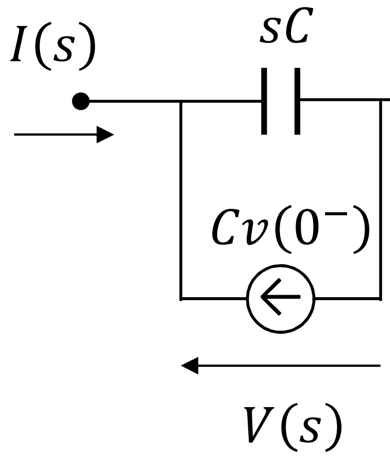


第一種初期条件:$t = 0^-$
第二種初期条件:$t = 0^+$

ラプラス変換による回路解析

- コンデンサ
  - $C\dfrac{dv(t)}{dt} = i(t)$
    - アドミタンス表現

$$I(s) = sCV(s) - Cv(0^-)$$



    - インピーダンス表現

$$V(s) = \frac{1}{sC}I(s) + \frac{v(0^-)}{s}$$