回路とシステム
第三回
ラプラス変換による回路解析

舟木　剛

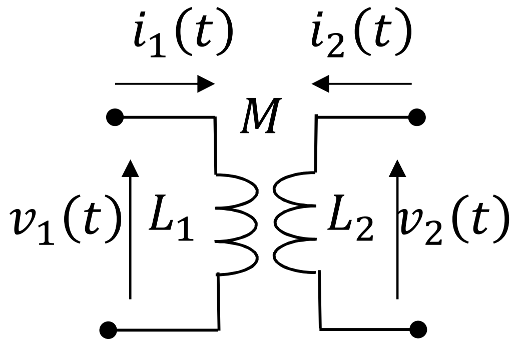
2019年10月28日2限

講義計画

- 回路方程式　1回
  - 節点方程式と閉路方程式
- ラプラス変換による回路解析　1回
- 線形回路の応答　2回
  - 零入力応答（重ね合わせの理、零入力応答の時間応答、漸近安定性）
  - 零状態応答（伝達関数、重ね合わせの理、インパルス応答と合成積、安定伝達関数、周波数応答）
- １ポート回路　3回
  - テブナン・ノートンの定理
  - 安定性と正実性（開放安定性、短絡安定性、正実関数）
- ２ポート回路　4回
  - 2ポート回路の行列表現
  - 相反2ポート回路
  - 相互接続
  - 分布定数回路の等価回路（T形等価回路、π形等価回路）
- 状態方程式による回路解析　2回
  - 状態方程式の導出（状態変数、状態方程式、出力方程式）
  - 状態方程式の解（零入力応答、零状態応答）
- 三相交流　1回
  - 平衡三相回路

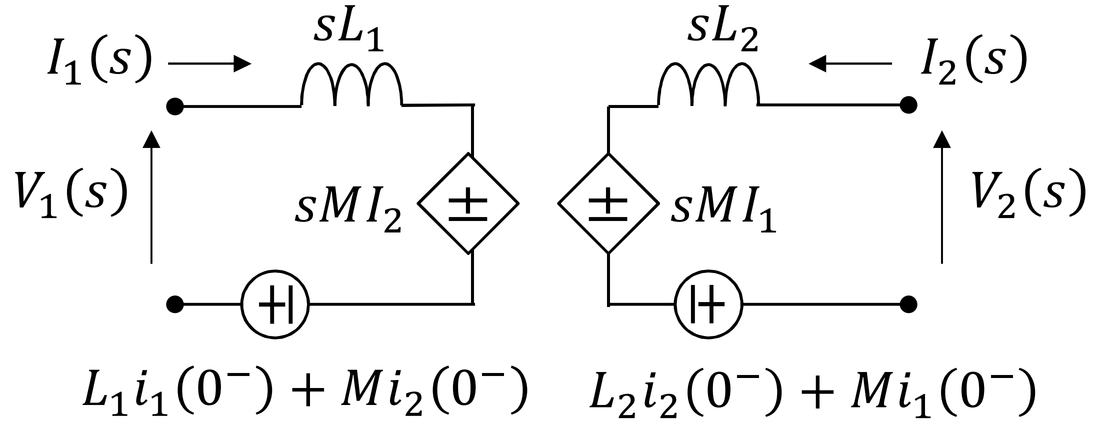
トランス

- 結合インダクタ(変圧器)
  - 自己インダクタンスL_1, L_2
  - 相互インダクタンスM
  - 結合係数$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$
  - 時間領域
    - $v_1(t) = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + M \frac{di_2(t)}{dt}$
    - $v_2(t) = L_2 \frac{di_2(t)}{dt} + M \frac{di_1(t)}{dt}$
  - 複素領域
    - $V_1(s) = sL_1 I_1(s) + sMI_2(s) - \left(L_1 i_1(0^-) + M i_2(0^-)\right)$
    - $V_2(s) = sL_2 I_2(s) + sMI_1(s) - \left(L_2 i_2(0^-) + M i_1(0^-)\right)$



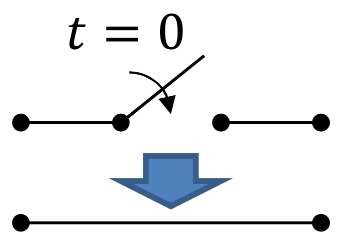
ラプラス変換による回路解析

- 行列表現
  - $\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{V}(s) = \begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix}, \boldsymbol{I}(s) = \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix}\ \boldsymbol{i}(0^-) = \begin{bmatrix} i_1(0^-) \\ i_2(0^-) \end{bmatrix}$
  - $\boldsymbol{V}(s) = s\boldsymbol{L}\boldsymbol{I}(s) - \boldsymbol{L}\boldsymbol{i}(0^-)$
    - $\boldsymbol{L}$が正則であればアドミタンス表現可能



ラプラス変換による回路解析

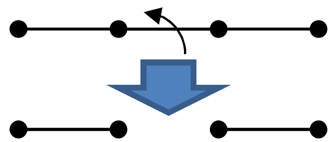
- スイッチ
  - 閉スイッチ　$t = 0$でオン
    - 時間領域
      - $v(t)$=有限の値　　$t < 0$
      - $v(t) = 0$　　　　$t > 0$
    - 複素領域
      - $V(s) = \int_{-\infty}^{\infty} v(t) e^{-st} dt = \int_{0^-}^{0^+} v(t) dt = 0$
        - s領域では短絡枝



ラプラス変換による回路解析

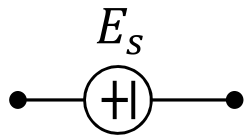
- スイッチ
  - 開スイッチ　$t = 0$でオフ
    - 時間領域
      - $i(t)$=有限の値　　$t < 0$
      - $i(t) = 0$　　$t > 0$
    - 複素領域
      - $I(s) = \int_{-0}^{\infty} i(t) e^{-s}\ dt = \int_{0^-}^{0^+} i(t)dt = 0$

$t = 0$

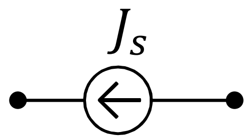


ラプラス変換による回路解析

- 電源
  - 電圧源$e_s(t)$ $\mathcal{L}[e_s(t)] = E_s(s) = \dfrac{E}{s}$

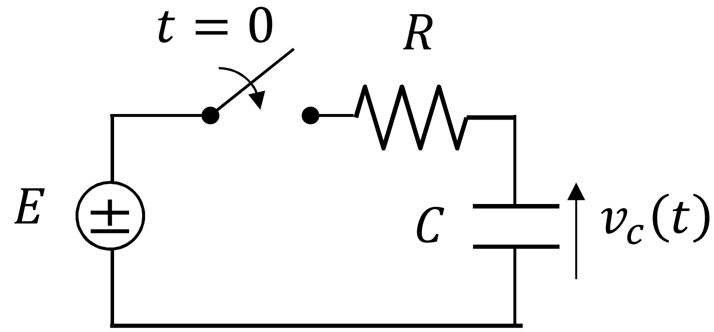


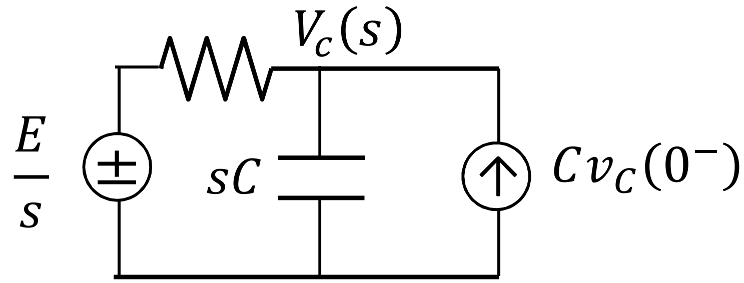
  - 電流源$j_s(t)$ $\mathcal{L}[j_s(t)] = J_s(s) = \dfrac{J}{s}$



- 線形時不変の素子で構成される回路網
  - 領域では電源を含む抵抗回路網の解析になる
    - 初期値が0の場合
      - $V(s) = Z(s)I(s)$ $Z(s) = R, sL, \dfrac{1}{sC}$
      - $I(s) = Y(s)V(s)$ $Y(s) = \dfrac{1}{R}, \dfrac{1}{sL}, sC$

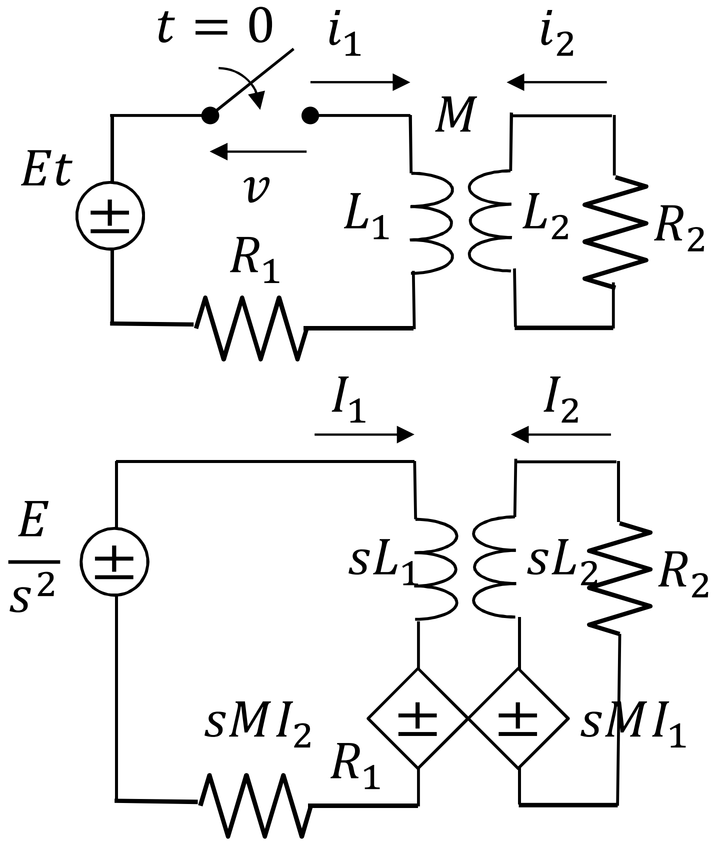
ラプラス変換による回路解析例





- RC回路の$t > 0$における応答
  - 節点方程式
    - $\frac{\frac{E}{S}-V_C(s)}{R} = sCV_C(s) - Cv_C(0^-)$
    - $V_C(s)\left\{sC + \frac{1}{R}\right\} = \frac{\frac{E}{s}}{R} + Cv_C(0^-)$
    - $V_C(s) = \frac{\frac{E}{sR}+Cv_C(0^-)}{sC+\frac{1}{R}} = \frac{E+sCRv_C(0^-)}{s(sCR+1)} = \frac{E}{s} + \frac{v_C(0^-)-E}{s+\frac{1}{CR}}$
  - 時間応答
    - $v_C(t) = E + [v_C(0^-) - E]e^{-\frac{t}{CR}}$

結合インダクタ(トランス)回路



- スイッチ　→　初期値0
- KVL
  - $(sL_1+R_1)I_1(s)+sMI_2(s)=\frac{E}{s^2}$
  - $(sL_2+R_2)I_2(s)+sMI_1(s)=0$
- 行列表現
  - $\begin{bmatrix} sL_1+R_1 & sM \\ sM & sL_2+R_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{E}{s^2} \\ 0 \end{bmatrix}$
  - $\begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} sL_1+R_1 & sM \\ sM & sL_2+R_2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} \frac{E}{s^2} \\ 0 \end{bmatrix}$

$$=\frac{E}{(sL_1+R_1)(sL_2+R_2)-(sM)^2}\begin{bmatrix} sL_2+R_2 & -sM \\ -sM & sL_1+R_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{E}{s^2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

結合インダクタ(トランス)回路

- $R_1 = 0.5\Omega, R_2 = 2\Omega, L_1 = 0.75\mathrm{H}\ , L_2 = 3\mathrm{H}\ ,$ $M = 0.5\mathrm{H}\ , E = 1\mathrm{V/s}$
  - $\begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{2s^2+3s+1} \begin{bmatrix} \frac{3s+2}{s^2} \\ -\frac{1}{2s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{s^2} - \frac{3}{s} + \frac{1}{s+1} + \frac{2}{s+0.5} \\ -\frac{1}{2s} - \frac{0.5}{s+1} + \frac{1}{s+0.5} \end{bmatrix}$
  - $i_1(t) = 2t - 3 + e^{-t} + 2e^{-0.5t}$
  - $i_2(t) = -0.5 - 0.5e^{-t} + e^{-0.5t}$

回路の応答

- 線形時不変回路の応答
  - 微分代数方程式→ラプラス変換による求解
- 節点n個，枝b個の回路網
  - 節点電位ベクトル$E(s)$
    - 一つの節点を基準に選ぶ→$(n-1)$次
  - 枝電流・枝電圧ベクトル$I(s), V(s)$
    - b次

回路方程式

- KCL　$AI(s) = 0$
- KVL　$V(s) = A^T E(s)$
  - 既約接続行列A　$(n-1) \times b$
- 枝電流と枝電圧の関係

$$M(s)V(s) + N(s)I(s) = FU(s) + Gx^0$$

  - M, N　$b \times b$のsの多項式
  - F, G　定数行列
  - $U(s)$　入力電源
  - x^0　初期値

タブロー方程式での表現

- $$\begin{array}{c} n-1 \\ b \\ b \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 0 & A \\ -A^T & I_b & 0 \\ 0 & M(s) & N(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E(s) \\ V(s) \\ I(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ FU(s) + Gx^0 \end{bmatrix}$$
  - I_b: $b \times b$の単位行列
- $$T \begin{bmatrix} E(s) \\ V(s) \\ I(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F \end{bmatrix} U(s) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ G \end{bmatrix} x^0$$

節点方程式と閉路方程式を混ぜた表現

- $$\begin{bmatrix} E(s) \\ V(s) \\ I(s) \end{bmatrix} = T^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F \end{bmatrix} U(s) + T^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ G \end{bmatrix} x^0$$

タブロー方程式での表現

- $\begin{bmatrix} E(s) \\ V(s) \\ I(s) \end{bmatrix} = H(s)U(s) + Q(s)x^0$
  - $H(s)U(s)$　　初期値x^0を0とした入力$U(s)$に対する応答
    - 零状態応答
  - $Q(s)x^0$　入力$U(s)$を0とした初期値x^0に対する応答
    - 零入力応答
- 全応答=零状態応答+零入力応答
  - 時間領域　　$y(t) = y_{zs}(t) + y_{zi}(t)$
  - 複素領域　　$Y(s) = Y_{zs}(s) + Y_{zi}(s)$