

回路とシステム
第12回
状態方程式
三相回路
舟木 剛

2020年1月27日2限

講義計画

- 回路方程式 1回
 - 節点方程式と閉路方程式
- ラプラス変換による回路解析 1回
- 線形回路の応答 2回
 - 零入力応答(重ね合わせの理、零入力応答の時間応答、漸近安定性)
 - 零状態応答(伝達関数、重ね合わせの理、インパルス応答と合成積、安定伝達関数、周波数応答)
- 1ポート回路 3回
 - テブナン・ノートンの定理
 - 安定性と正実性(開放安定性、短絡安定性、正実関数)
- 2ポート回路 4回
 - 2ポート回路の行列表現
 - 相反2ポート回路
 - 相互接続
 - 分布定数回路の等価回路(T形等価回路、 π 形等価回路)
- 状態方程式による回路解析 2回
 - 状態方程式の導出(状態変数、状態方程式、出力方程式)
 - 状態方程式の解(零入力応答、零状態応答)
- 三相交流 1回
 - 平衡三相回路

状態方程式の解

- 状態方程式

- $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$ $\mathbf{A}: n \times n, \mathbf{B}: n \times m$

- $\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$ $\mathbf{C}: p \times n, \mathbf{D}: p \times m$

- 状態変数: $\mathbf{x}(t)$

- 入力変数: $\mathbf{u}(t)$

- 出力変数: $\mathbf{y}(t)$

- 行列表現

- $\mathcal{L}[\mathbf{x}(t)] = \mathbf{X}(s)$

- $s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0^-) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s)$

- $\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s) + \mathbf{D}\mathbf{U}(s)$

状態方程式の解

- ラプラス変換

- $sX_1(s) - x_1(0^-) = a_{11}X_1(s) + a_{12}X_2(s) + b_1U(s)$

- $sX_2(s) - x_2(0^-) = a_{21}X_1(s) + a_{22}X_2(s) + b_2U(s)$

- $Y(s) = c_1X_1(s) + c_2X_2(s) + dU(s)$

状態方程式の解

- 行列表現

- $(sI - A)X(s) = \boldsymbol{x}(0^-) + \boldsymbol{B}U(s)$

- $X(s) = (sI - A)^{-1}\boldsymbol{x}(0^-) + (sI - A)^{-1}\boldsymbol{B}U(s)$

- $Y(s) = \boldsymbol{C}[(sI - A)^{-1}\boldsymbol{x}(0^-) + (sI - A)^{-1}\boldsymbol{B}U(s)] + \boldsymbol{D}U(s)$
 $= \boldsymbol{C}(sI - A)^{-1}\boldsymbol{x}(0^-) + [(sI - A)^{-1}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D}]U(s)$

状態方程式の零入力応答

- 零入力
 - 初期状態 $x(0^-)$
 - 入力 $u(t) = 0$
- 状態方程式
 - $\dot{x}(t) = Ax(t)$
 - ラプラス変換
 - $sX(s) - x(0^-) = AX(s)$
 - $X(s) = (sI - A)^{-1}x(0^-)$
 - $n = 1$ の場合
 - $X(s) = \frac{x(0^-)}{s-A} \quad \rightarrow \quad x(t) = x(0^-)e^{At}$

状態方程式の零入力応答

- 行列指数関数 ($n > 1$)
 - $e^{At} = \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}]$
 - $\mathbf{x}(t) = \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}\mathbf{x}(0^-)] = e^{At}\mathbf{x}(0^-)$
 - $(sI - A)^{-1} = \frac{\text{adj}(sI - A)}{\det(sI - A)} = \frac{B(s)}{d(s)}$
 - $B(s) = \text{adj}(sI - A)$ 行列 $(sI - A)$ 余因子行列
 - $d(s) = \det(sI - A)$ A の特性多項式
 - 特性方程式
 - $d(s) = (s - \lambda_1) \cdots (s - \lambda_n)$ λ_i : 行列 A の固有値
 - $(sI - A)^{-1} = \sum_{i=1}^n \frac{K_i}{s - \lambda_i}$ 部分分数展開
 - 行列の場合 K_i も行列になる
 - $K_i = \lim_{s \rightarrow \lambda_i} (s - \lambda_i)(sI - A)^{-1}$
 - $e^{At} = \sum_{i=1}^n K_i e^{\lambda_i t}$

行列指数関数の例

- $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$

- $(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s-1 & -2 \\ -2 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(s-1)(s+2)-4} \begin{bmatrix} s+2 & 2 \\ 2 & s-1 \end{bmatrix}$
 $= \frac{1}{s^2 + s - 6} \begin{bmatrix} s+2 & 2 \\ 2 & s-1 \end{bmatrix} = \frac{1}{(s-2)(s+3)} \begin{bmatrix} s+2 & 2 \\ 2 & s-1 \end{bmatrix}$

- $K_1 = \lim_{s \rightarrow 2} (s-2)(sI - A)^{-1} = \lim_{s \rightarrow 2} \frac{1}{s+3} \begin{bmatrix} s+2 & 2 \\ 2 & s-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$

- $K_2 = \lim_{s \rightarrow -3} (s+3)(sI - A)^{-1} = \lim_{s \rightarrow -3} \frac{1}{s-2} \begin{bmatrix} s+2 & 2 \\ 2 & s-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$

- $e^{At} = K_1 e^{\lambda_1 t} + K_2 e^{\lambda_2 t} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} e^{2t} + \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} e^{-3t}$

状態方程式の零状態応答

- 零状態
 - 初期状態 $x(0^-) = 0$
 - 入力 $u(t)$
- 状態方程式
 - $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$
 - ラプラス変換
 - $sX(s) = AX(s) + BU(s)$
 - $(sI - A)X(s) = BU(s)$
 - $X(s) = (sI - A)^{-1}BU(s)$
 - $Y(s) = [C(sI - A)^{-1}B + D]U(s) = H(s)U(s)$
 - $H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$
 - 時間応答(畳み込み積分)
 - $x(t) = \int_{0^-}^{t^+} e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau$
 - $y(t) = \int_{0^-}^{t^+} Ce^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau + du(t)$

伝達関数の求解例

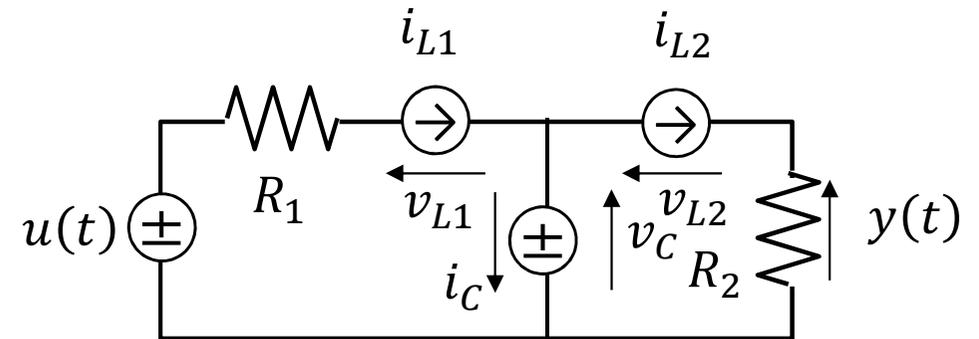
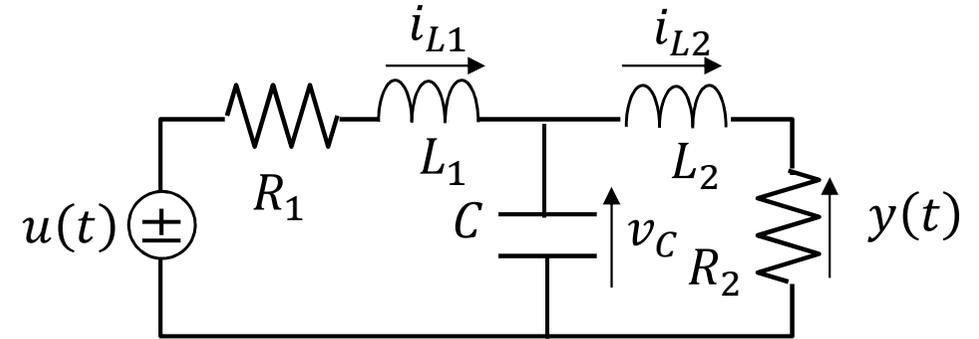
- 入力 $u(t)$, 出力 $y(t)$
- KVL
 - $u - R_1 i_{L1} - v_{L1} - v_c = 0$
 - $R_2 i_{L2} + v_{L2} - v_c = 0$
- KCL
 - $i_c = i_{L1} - i_{L2}$

動特性

- $v_{L1} = L_1 \frac{di_{L1}}{dt}$
- $v_{L2} = L_2 \frac{di_{L2}}{dt}$
- $i_c = C \frac{dv_c}{dt}$

状態方程式

$$\begin{cases} u - R_1 i_{L1} - L_1 \frac{di_{L1}}{dt} - v_c = 0 \\ R_2 i_{L2} + L_2 \frac{di_{L2}}{dt} - v_c = 0 \\ i_{L1} - i_{L2} = C \frac{dv_c}{dt} \end{cases}$$



- 出力方程式
 - $y = R_2 i_{L2}$

伝達関数の求解例

- 状態方程式の変形
- 行列表示

$$\frac{di_{L1}}{dt} = \frac{u}{L_1} - \frac{R_1 i_{L1}}{L_1} - \frac{v_C}{L_1}$$

$$\bullet \frac{di_{L2}}{dt} = -\frac{R_2 i_{L2}}{L_2} + \frac{v_C}{L_2}$$

$$\frac{dv_C}{dt} = \frac{i_{L1}}{C} - \frac{i_{L2}}{C}$$

- 出力方程式の変形

- 行列表示

$$\bullet y = [0 \quad R_2 \quad 0] \begin{bmatrix} i_{L1} \\ i_{L2} \\ v_C \end{bmatrix}$$

$$\bullet \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_{L1} \\ i_{L2} \\ v_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_1}{L_1} & 0 & -\frac{1}{L_1} \\ 0 & -\frac{R_2}{L_2} & \frac{1}{L_2} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{L1} \\ i_{L2} \\ v_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

伝達関数の求解例

$$\bullet A = \begin{bmatrix} \frac{-R_1}{L_1} & 0 & \frac{-1}{L_1} \\ 0 & \frac{-R_2}{L_2} & \frac{1}{L_2} \\ \frac{1}{C} & \frac{-1}{C} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bullet B = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bullet X = \begin{bmatrix} i_{L1} \\ i_{L2} \\ v_C \end{bmatrix}$$

- $sX = AX + Bu$
- $(sI - A)X = Bu$
- $X = (sI - A)^{-1}Bu$
- $y = [0 \quad R_2 \quad 0]X$
 $= [0 \quad R_2 \quad 0](sI - A)^{-1}Bu$
- 伝達関数
 - $\frac{y}{u} = [0 \quad R_2 \quad 0](sI - A)^{-1}B$
- $(sI - A)^{-1} = \frac{\text{adj}(sI - A)}{\det(sI - A)}$

伝達関数の求解例

- $$\det(sI - A) = \det \begin{vmatrix} s + \frac{R_1}{L_1} & 0 & \frac{1}{L_1} \\ 0 & s + \frac{R_2}{L_2} & \frac{-1}{L_2} \\ \frac{-1}{C} & \frac{1}{C} & s \end{vmatrix} =$$

$$\left(s + \frac{R_1}{L_1}\right) \left(s + \frac{R_2}{L_2}\right) s + \frac{1}{L_1} \left(s + \frac{R_2}{L_2}\right) \frac{1}{C} +$$

$$\left(s + \frac{R_1}{L_1}\right) \frac{1}{L_2} \frac{1}{C} = \left(s + \frac{R_1}{L_1}\right) \left(s + \frac{R_2}{L_2}\right) s +$$

$$\left(s + \frac{R_2}{L_2}\right) \frac{1}{L_1 C} + \left(s + \frac{R_1}{L_1}\right) \frac{1}{L_2 C}$$

- $$[0 \quad R_2 \quad 0] \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} =$$

$$[R_2 k_{21} \quad R_2 k_{22} \quad R_2 k_{23}]$$

- $$[R_2 k_{21} \quad R_2 k_{22} \quad R_2 k_{23}] \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$\frac{R_2 k_{21}}{L_1}$$

- $$k_{21} = \text{adj}(sI - A)_{21}$$

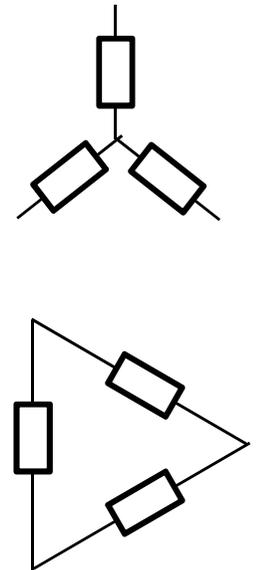
$$= (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{L_1} \\ \frac{1}{C} & s \end{vmatrix} = \frac{1}{L_1 C}$$

多相交流回路

- 複数の交流電源が回路に同時に存在
 - n 個存在 $\rightarrow n$ 相式
 - 周波数が同じ
 - 位相が異なる
 - その他の条件
 - 対称多相方式
 - n 個の起電力の大きさが等しく, 位相差が等間隔
 - 非対称多相方式
 - n 個の起電力の大きさが一致しない, または位相差が等間隔でない

多相交流の結合方式

- 独立多相方式 各相が結合されていない
- 結合多相方式 各相が結合されている
 - 平衡多相方式
 - 各相の瞬時電力の和が一定
 - 不平衡多相方式
 - 各相の瞬時電力の和が脈動する
 - 星形結線 各相の終端が共通
 - 三相Y結線
 - 環状結線 各相の終端を次相の始端に接続
 - 三相 Δ 結線



対称多相交流

- 対称 n 相交流の起電力の瞬時値

- $e_a = E_m \sin \omega t$
- $e_b = E_m \sin \left(\omega t - \frac{2\pi}{n} \right)$
- $e_n = E_m \sin \left(\omega t - \frac{(n-1)\pi}{n} \right)$
 - E_m : 振幅
 - ω : 角周波数
 - $\frac{2\pi}{n}$: 位相差

- ベクトル表記

- $E_a = E$
- $E_b = E e^{-j\frac{2\pi}{n}} = E \left(\cos \frac{2\pi}{n} - j \sin \frac{2\pi}{n} \right)$
- $E_n = E e^{-j\frac{n-1}{n}2\pi} = E \left(\cos \frac{n-1}{n} 2\pi - j \sin \frac{n-1}{n} 2\pi \right)$
- $a = e^{j\frac{2\pi}{n}} = \cos \frac{2\pi}{n} + j \sin \frac{2\pi}{n}$
 - $E_a = E$
 - $E_b = a^{-1} E$
 - $E_n = a^{-(n-1)} E$

対称 n 相交流の星形起電力と環状起電力の関係

- 星形起電力

- E_a, E_b, \dots, E_n

- 環状起電力

- $E_{ab}, E_{bc}, \dots, E_{na}$

- 関係

- $E_{ab} = E_a - E_b = E - a^{-1}E = (1 - a^{-1})E$

- $E_{bc} = E_b - E_c = a^{-1}E - a^{-2}E = a^{-1}(1 - a^{-1})E$

- $E_{na} = E_n - E_a = a^{-(n-1)}E - E = (a^{-(n-1)} - 1)E$

ベクトル計算

- $1 - a^{-1} = 1 - e^{-j\frac{2\pi}{n}} = 1 - \cos\frac{2\pi}{n} + j\sin\frac{2\pi}{n} = 1 - \cos^2\frac{\pi}{n} + \sin^2\frac{\pi}{n} + j2\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n} = 2\sin^2\frac{\pi}{n} + j2\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n} = 2\sin\frac{\pi}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n} + j\cos\frac{\pi}{n}\right) = 2\sin\frac{\pi}{n}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}\right) + j\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}\right)\right) = 2\sin\frac{\pi}{n}e^{j\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}\right)} = 2\sin\frac{\pi}{n}e^{j\frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{2}{n}\right)}$
- $E_{ab} = 2E\sin\frac{\pi}{n}e^{j\frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{2}{n}\right)}$
- $E_{bc} = 2E\sin\frac{\pi}{n}e^{j\frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{2}{n}\right)}e^{-j\frac{2\pi}{n}} = 2E\sin\frac{\pi}{n}e^{j\frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{3}{n}\right)}$
- $E_{na} = 2E\sin\frac{\pi}{n}e^{j\frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{2}{n}\right)}e^{-j\frac{(n-1)2\pi}{n}} = 2E\sin\frac{\pi}{n}e^{j\frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{3}{n}\right)}$
- 起電力は $2\sin\frac{\pi}{n}$ 倍となり, 位相は $\frac{\pi}{2}$ すすむ

対称 n 相回路の起電力の関係

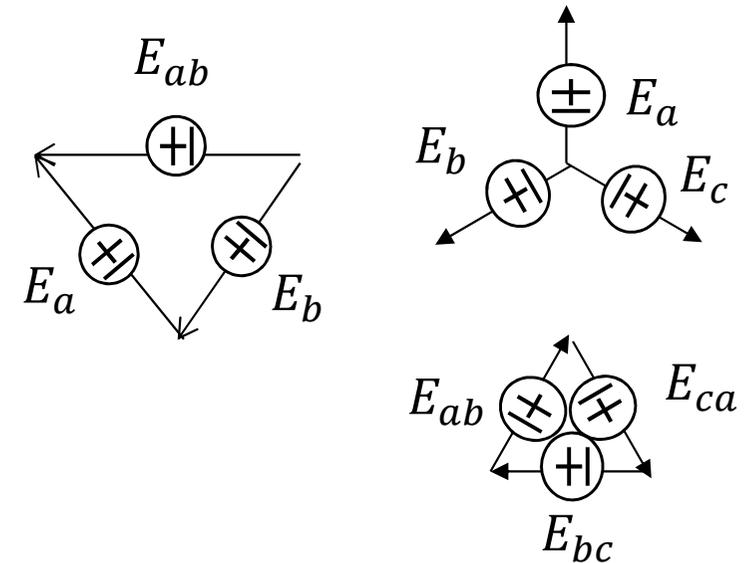
- $E_a + E_b + \dots + E_n = 0$
- $E_{ab} + E_{bc} + \dots + E_{na} = 0$
- 電流も同様
- $n = 3 \rightarrow$ 三相交流

- $e_a = E_m \sin \omega t$

- $e_b = E_m \sin \left(\omega t - \frac{2\pi}{3} \right)$

- $e_c = E_m \sin \left(\omega t - \frac{4\pi}{3} \right)$

- $e_a + e_b + e_c = E_m \sin \omega t + E_m \sin \left(\omega t - \frac{2\pi}{3} \right) + E_m \sin \left(\omega t - \frac{4\pi}{3} \right) =$
 $E_m \left\{ \sin \omega t + \sin \omega t \cos \frac{2\pi}{3} - \cos \omega t \sin \frac{2\pi}{3} + \sin \omega t \cos \frac{2\pi}{3} + \right.$
 $\left. \cos \omega t \sin \frac{2\pi}{3} \right\} = E_m \left\{ \sin \omega t - \frac{1}{2} \sin \omega t - \frac{1}{2} \sin \omega t \right\} = 0$



対称3相回路の起電力の関係

- ベクトル表現

- $E_a = E$

- $E_b = E e^{-j\frac{2\pi}{3}} = E a^{-1}$

- $E_c = E e^{-j\frac{4\pi}{3}} = E a^{-2}$

- $a = e^{j\frac{2\pi}{3}} = \cos\frac{2\pi}{3} + j \sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$

- $a^2 = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$

- $a^3 = 1$

- $1 + a + a^2 = 0$

対称3相回路の起電力の関係

- 相電圧 E_a, E_b, E_c
- 線間電圧
 - $E_{ab} = E_a - E_b = E_a(1 - a^2) = \sqrt{3}E_a e^{j\frac{\pi}{6}}$
 - $E_{bc} = E_b - E_c = E_b(1 - a^2) = \sqrt{3}E_b e^{j\frac{\pi}{6}}$
 - $E_{ca} = E_c - E_a = E_c(1 - a^2) = \sqrt{3}E_c e^{j\frac{\pi}{6}}$
- 線間電圧は相電圧の $\sqrt{3}$ 倍, 位相は $\frac{\pi}{6}$ 進む